دفترچه پاسخ

آزمون ۲۲ دی ۱۴۰۲

اختصاصی دوازدهم ریاضی

	نام درس	نام طراحان
اختصاصی	حسابان ۲	کاظم اجلالی-حسین شفیع‌زاده-علیرضا نداف‌زاده
	ریاضیات گسسته	فرزاد جوادی-کیوان دارابی-مصطفی دیداری-محمد صحت‌کار-احمدرضا فلاح-مهرداد ملوندی
	هندسه	اسحاق اسفندیار-سیدمحمدرضا حسینی‌فرد-کیوان دارابی-محمد صحت‌کار-هومن عقیلی-احمدرضا فلاح-مهرداد ملوندی
	فیزیک	عبدالرضا امینی‌نسب-زهره آقامحمدی-علیرضا جباری-محمد راست‌پیمان-محمدجواد سورچی-معصومه شریعت‌ناصری محمدرضا شریفی-مهدی شریفی-محمود منصوری-امیراحمد میرسعید-سیده‌ملیحه میرصالحی-حسام نادری-مجتبی نکوئیان
	شیمی	علی امینی-احسان ایروانی-محسن بابامیری-عامر برزیگر-محمدرضا جمشیدی-حسن رحمتی‌کوکنده-پویا رستگاری مرتضی زارعی-محمدرضا زهره‌وند-رضا سلیمانی-جواد سوری‌لکی-مبینا شرافتی‌پور-میلاد شیخ‌الاسلامی-حامد صابری سهراب صادقی‌زاده-محمدجواد صادقی-امیرحسین طیبی-دانیال علی‌دوست-محمد فائزنیا-حسین ناصری‌ثانی

گزینشگران و ویراستاران

نام درس	حسابان ۲	هندسه	ریاضیات گسسته	فیزیک	شیمی
گزینشگر	کاظم اجلالی حسین شفیع‌زاده علیرضا نداف‌زاده	کیوان دارابی محمد صحت‌کار	کیوان دارابی محمد صحت‌کار	حسام نادری	امیرحسین معروفی
گروه ویراستاری	مهدی ملارمضانی سعید خان‌بابایی محمدرضا راسخ	مهرداد ملوندی	مهرداد ملوندی	دانیال راستی مهدی شریفی زهره آقامحمدی	محمدحسن محمدزاده مقدم امیرحسین مسلمی امیررضا حکمت‌نیا
بازبینی نهایی رتبه های برتر	سهیل تقی‌زاده	مهبد خالتی	مهبد خالتی	معین یوسفی‌نیا حسین بصیر ترکمبور	علی رضایی امیررضا واشقانی احسان پنجه‌شاهی ماهان زواری
مسئول درس	عادل حسینی	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	حسام نادری	پارسا عیوض‌پور
مستندسازی	سمیه اسکندری	سرژ یقیازاریان تبریزی	سرژ یقیازاریان تبریزی	علیرضا همایون‌خواه	امیرحسین مرتضوی

گروه فنی و تولید

مدیر گروه	مهرداد ملوندی	
مسئول دفترچه	نرگس غنی‌زاده	
گروه مستندسازی	مدیر گروه: محیا اصغری	مسئول دفترچه: الهه شهبازی
حروف‌نگار	فرزانه فتح اله‌زاده	
ناظر چاپ	سوران نعیمی	

گروه آزمون

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین – پلاک ۹۲۳ – کانون فرهنگی آموزش – تلفن: ۶۴۶۳-۰۲۱

ریاضیات

۱- **گزینهٔ «۳»** (حسین شفیع‌زاده)

بهتر است هر چهار ضابطه را برای g در نظر بگیریم و برای تابع $f+g$ حد موردنظر را حساب کنیم:

گزینهٔ «۱»:

$$\lim_{x\to ۳^+}\frac{۱}{(f+g)(x)}=\lim_{x\to ۳^+}\frac{۱}{x(x-۳)+(x-۳)(x-۶)}$$
$$=\lim_{x\to ۳^+}\frac{۱}{(x-۳)(۲x-۶)}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

گزینهٔ «۲»:

$$\lim_{x\to ۳^+}\frac{۱}{(f+g)(x)}=\lim_{x\to ۳^+}\frac{۱}{x(x-۳)+(x-۳)^۲}$$
$$=\lim_{x\to ۳^+}\frac{۱}{(x-۳)(۲x-۳)}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

گزینهٔ «۳»:

$$\lim_{x\to ۳^+}\frac{۱}{(f+g)(x)}=\lim_{x\to ۳^+}\frac{۱}{x(x-۳)+(x-۳)(x-۷)}$$
$$=\lim_{x\to ۳^+}\frac{۱}{(x-۳)(۲x-۷)}=\frac{۱}{۰^-}=-\infty$$

گزینهٔ «۴»:

$$\lim_{x\to ۳^+}\frac{۱}{(f+g)(x)}=\lim_{x\to ۳^+}\frac{۱}{x(x-۳)+(x-۳)(x-۱)}$$
$$=\lim_{x\to ۳^+}\frac{۱}{(x-۳)(۲x-۱)}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی- حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۵۱ تا ۵۴)

۲- **گزینهٔ «۴»** (حسین شفیع‌زاده)

حد عبارت $\frac{۱}{a-۲\cos\pi x}$ در هر دو همسایگی چپ و راست $x=b$ برابر $-\infty$ شده است، پس $x=b$ ریشهٔ مضاعف عبارت مخرج است.

$$a-۲\cos\pi b=۰\Rightarrow\cos\pi b=\frac{a}{۲}$$

وقتی حاصل $\cos$ برابر ±۱ شود، جواب مضاعف است:

$$\Rightarrow\frac{a}{۲}=\pm۱\Rightarrow a=\pm۲$$

اما این نکته مهم است که عبارت مخرج در همسایگی $x=b$ باید منفی باشد، یعنی حالتی باشد که $a<۲\cos\pi x$ باشد $(a=-۲)$ و زمانی رخ می‌دهد که $\cos\pi x$ در مینیمم خودش باشد که در بازه $(۰,\pi b)=(۰,۲\pi)$ عبارت $\cos x$ در $x=\pi$ مینیمم می‌شود.

$$\Rightarrow\pi b=\pi\Rightarrow b=۱$$
$$\Rightarrow a+b=-۱$$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی- حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۵۱ تا ۵۴)

۳- **گزینهٔ «۴»** (حسین شفیع‌زاده)

در ضابطهٔ تابع f، عبارت $۲+\cos x$ بزرگ‌تر از ۱ است، پس ریشه ندارد. این یعنی مجانب‌های قائم نمودار تابع f فقط مربوط به مجانب‌های نمودار تابع $y=\tan ۲x$ است.

$$۲x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x\neq\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$$

در بازهٔ $(\frac{\pi}{۲},\pi)$ تنها مجانب نمودار تابع $y=\tan ۲x$، خط $x=\frac{۳\pi}{۴}$ است. از آن‌جا که عبارت $۲+\cos x$ مثبت است. وضعیت نمودار تابع f در همسایگی این خط، همان وضعیت نمودار تابع $y=\tan ۲x$ در همسایگی خط است. در نتیجه گزینهٔ «۴» درست است.

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی- حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۵۵ تا ۵۸)

۴- **گزینهٔ «۳»** (حسین شفیع‌زاده)

ضابطه تابع f را $f(x)=mx+h$ و در نتیجه ضابطه تابع g را $g(x)=-\frac{۱}{m}x+h'$ در نظر می‌گیریم. پس داریم:

$$f^{-۱}(x)=\frac{۱}{m}x-\frac{h}{m}\ ,\ g^{-۱}(x)=-mx+mh'$$

و حال این ضابطه‌ها را در عبارت داده شده جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-g(x)}{f^{-۱}(x)+g^{-۱}(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{mx+h-(-\frac{۱}{m}x+h')}{\frac{۱}{m}x-\frac{h}{m}-mx+mh'}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(m+\frac{۱}{m})x}{(\frac{۱}{m}-m)x}=\frac{m+\frac{۱}{m}}{\frac{۱}{m}-m}=\frac{m^۲+۱}{۱-m^۲}=-\frac{۵}{۳}$$
$$\Rightarrow ۳m^۲=۸\Rightarrow m=\pm۲$$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی- حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۶۳ تا ۶۶)

۵- **گزینهٔ «۳»** (حسین شفیع‌زاده)

$$\lim_{x\to۰^-}g(x)=\lim_{x\to۰^-}f(\frac{-x-\sqrt[۳]{x^۲}}{x})=\lim_{x\to۰^-}f(-۱-\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}})$$
$$=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x-(x+۱)}{۲x+۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x}{۲x}=۱$$

$$\lim_{x\to۰^+}g(x)=\lim_{x\to۰^+}f(\frac{x-\sqrt[۳]{x^۲}}{x})=\lim_{x\to۰^+}f(۱-\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}})$$
$$=\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x+(x+۱)}{۲x+۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۴x}{۲x}=۲$$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی- حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۶۳ تا ۶۶)

تلاشی در مسیر موفقیت

۶- **گزینهٔ «۴»** (حسین شفیع‌زاده)

تابع داده شده، اگر بخواهد دو خط مجانب موازی محورهای مختصات داشته‌باشد، باید یک مجانب افقی و یک مجانب قائم داشته‌باشد، زیرا عبارت صورت ریشه ندارد. پس اگر نمودار تابع فقط یک مجانب قائم داشته‌باشد، عبارت مخرج باید ریشه مضاعف داشته باشد:

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 16a^2 = 0 \Rightarrow b = \pm 4a$$

$$\Rightarrow y = \frac{2x^2+3}{ax^2 \pm 4ax + 4a} = \frac{2x^2+3}{a(x\pm 2)^2}$$

محل تقاطع خطوط مجانب روی نیمساز ربع چهارم است، یعنی ریشه مخرج مقداری مثبت است. پس ضابطه با علامت منفی درست است.

$$\Rightarrow y = \frac{2x^2+3}{a(x-2)^2}$$

خط $x=2$ مجانب قائم نمودار است و باید خط $y=-2$ مجانب افقی آن باشد:

$$\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+3}{a(x-2)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{ax^2} = \frac{2}{a} = -2 \Rightarrow a = -1$$

$$\xrightarrow{b=-4a} b = 4 \Rightarrow a - b = -5$$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی- حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۵۵ تا ۵۸ و ۶۷ تا ۶۹)

۷- **گزینهٔ «۲»** (حسین شفیع‌زاده)

نمودار تابع f فقط یک مجانب افقی و یک مجانب قائم دارد و از آنجا که برخلاف سؤال قبلی، عبارت صورت ریشه دارد، دو حالت زیر امکان‌پذیر است:

الف) مخرج، ریشهٔ مضاعف دارد:

Δ ی مخرج $\Delta = b^2 + 8a = 0$

در این حالت ریشهٔ مضاعف $x_0 = -\frac{b}{2a}$ است. همچنین معادله خط مجانب افقی نمودار تابع $y = \frac{2}{a}$ است. در نتیجه از آنجا که نقطه تقاطع روی خط $y = x$ است باید داشته باشیم:

$$-\frac{b}{2a} = \frac{2}{a} \Rightarrow b = -4 \xrightarrow{\Delta=0} 16 + 8a = 0 \Rightarrow a = -2$$

در این حالت $a - b = 2$ است.

ب) عبارت دو ریشه دارد که یکی از ریشه‌های آن با یکی از ریشه‌های صورت مشترک است. چون ریشه‌های عبارت صورت $x = \pm 1$ هستند، عبارت مخرج را می‌توانیم به صورت‌های زیر بنویسیم:

$$\begin{cases} ax^2 + bx - 2 = (ax+2)(x-1) \\ \text{یا} \\ ax^2 + bx - 2 = (ax-2)(x+1) \end{cases}$$

در این ضابطه‌ها به ترتیب $x = -\frac{2}{a}$ و $x = \frac{2}{a}$ خط مجانب قائم نمودار تابع است و در نتیجه نقطهٔ تقاطع خطوط مجانب $(-\frac{2}{a}, \frac{2}{a})$ و $(\frac{2}{a}, \frac{2}{a})$ است که چون نقطهٔ تقاطع روی خط $y = x$ قرار دارد، حالت امکان‌پذیر $(\frac{2}{a}, \frac{2}{a})$ است و داریم:

$$ax^2 + bx - 2 = (ax-2)(x+1) = ax^2 + (a-2)x - 2$$

$$\Rightarrow b = a - 2 \Rightarrow a - b = 2$$

در نهایت فقط یک مقدار برای $a-b$ وجود دارد.

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی- حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۵۵ تا ۵۸ و ۶۷ تا ۶۹)

۸- **گزینهٔ «۳»** (کاظم اجلالی)

ترتیب تبدیلات را روی ضابطه تابع داده شده انجام می‌دهیم:

$$y = x^2 - 2x + 3 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور عرض‌ها}} y = x^2 + 2x + 3$$

$$\xrightarrow{\text{عرض نقاط در } |k|} y = |k|(x^2 + 2x + 3)$$

$$\xrightarrow{\text{}2|k| \text{ واحد به سمت پایین}} y = |k|(x^2 + 2x + 3) - 2|k|$$

$$= |k|(x^2 + 2x + 1)$$

یعنی ضابطه مربوط به نمودار نهایی $y = |k|(x+1)^2$ است که نمودار این تابع به ازای همهٔ مقادیر k بر محور طول‌ها مماس است.

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

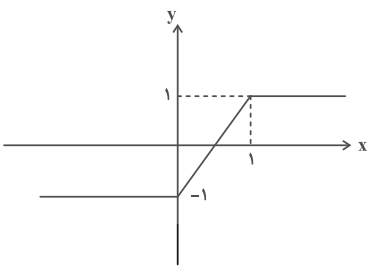
۹- **گزینهٔ «۱»** (کاظم اجلالی)

دامنه تابع $\mathbb{R}$ است و سعی می‌کنیم ضابطه تابع را ساده‌تر بنویسیم:

$$f(x) = \frac{2x-1}{|x|+|x-1|} \times \frac{|x|-|x-1|}{|x|-|x-1|}$$

$$= \frac{(2x-1)(|x|-|x-1|)}{x^2-(x-1)^2} = |x|-|x-1|$$

نمودار تابع $f(x) = |x|-|x-1|$ را رسم می‌کنیم و می‌بینیم که این نمودار روی $\mathbb{R}$ صعودی است.



(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

تلاشی درمسیر موفقیت

۱۰- **گزینهٔ «۱»** (کاظم اجلالی)

توجه کنید که اگر فرض کنیم $g(x)=k^x+1$ و $h(x)=\log_k x$ باشد، $f(x)=(hog)(x)$. اگر $k>1$، هر دو تابع h و g اکیداً صعودی‌اند و در نتیجه f اکیداً صعودی است. اگر $0<k<1$، توابع h و g اکیداً نزولی‌اند و در نتیجه f اکیداً صعودی است. بنابراین اگر $k\in(0,+\infty)-\{1\}$، تابع f اکیداً صعودی است.

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۱۱- **گزینهٔ «۲»** (کاظم اجلالی)

به تبدیلات زیر توجه کنید:

$$y=f(x)\xrightarrow[\text{تقسیم بر ۲}]{\text{طول نقاط}}y=f(2x)$$

$$\xrightarrow{\text{یک واحد به راست}}y=f(2(x-1))=f(2x-2)$$

$$\xrightarrow[\text{به‌محور طول‌ها}]{\text{قرینه نسبت}}y=-f(2x-2)$$

بنابراین ضابطهٔ تابع نهایی به‌صورت زیر است:

$$g(x)=-\frac{1}{8}(2x-2)^3-\frac{1}{4}m(2x-2)^2-n(2x-2)+k$$

$$=-(x-1)^3-m(x-1)^2-n(2x-2)+k$$

$$=-x^3+(3-m)x^2+(2m-2n-3)x+2n-m+k+1$$

چون نمودار رسم شده نمودار تابع $y=-x^3$ است، پس:

$$3-m=0\Rightarrow m=3$$

$$2m-2n-3=0\xrightarrow{m=3}n=\frac{3}{2}$$

$$2n-m+k+1=0\xrightarrow{m=3\ ,\ n=\frac{3}{2}}k=-1$$

پس $mnk=-\frac{9}{2}$ است.

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱ تا ۱۴)

۱۲- **گزینهٔ «۳»** (کاظم اجلالی)

ابتدا ریشه‌های صورت و مخرج عبارت زیر رادیکال را حساب می‌کنیم:

$$f(x)-f(2x-1)=0\Rightarrow f(x)=f(2x-1)\Rightarrow x=2x-1\Rightarrow x=1$$

$$f(x^2)-f(3x)=0\Rightarrow f(x^2)=f(3x)\Rightarrow x^2=3x\Rightarrow x=0,3$$

و برای تعیین علامت این عبارت‌ها داریم:

$$f(x)-f(2x-1)>0\Rightarrow f(x)>f(2x-1)\Rightarrow x<2x-1\Rightarrow x>1$$

$$f(x^2)-f(3x)>0\Rightarrow f(x^2)>f(3x)\Rightarrow x^2<3x\Rightarrow 0<x<3$$

بنابراین جدول تعیین علامت عبارت زیر رادیکال به‌صورت زیر است.

x	-2		0		1		3	
$f(x)-f(2x-1)$	▨	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x^2)-f(3x)$	▨	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$\frac{f(x)-f(2x-1)}{f(x^2)-f(3x)}$	▨	$+$	ت.ن	$-$	0	$+$	ت.ن	$-$

پس داریم:

$$\frac{f(2x)-f(2x-1)}{f(x^2)-f(3x)}\geq 0\Rightarrow -2\leq x<0 \text{ یا } 1\leq x<3$$

$$\Rightarrow D_g=[-2,0)\cup[1,3)$$

پس اعداد صحیحی که در دامنهٔ تابع قرار دارند عبارت‌انداز: $2,1,-1,-2$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۱۳- **گزینهٔ «۳»** (کاظم اجلالی)

روش اول: $P(x)$ بر $x-1$ بخش‌پذیر است؛ زیرا $P(1)$ برابر صفر است.

$$\Rightarrow P(x)=(x-1)Q(x)\quad (*)$$

حال $P(x)$ را به‌صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$P(x)=x^9-5x+5-1=x^9-1-5(x-1)$$

$$=(x-1)(x^8+x^7+\ldots+x+1)-5(x-1)$$

$$=(x-1)(x^8+x^7+\ldots+x-4)$$

پس $Q(x)=x^8+x^7+\ldots+x-4$ و باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر $x-1$ برابر $Q(1)=8-4=4$ است.

روش دوم:

$$Q(x)=\frac{P(x)}{x-1}$$

$$\Rightarrow Q(1)=\lim_{x\to1}\frac{P(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^9-5x+4}{x-1}$$

$$\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to1}\frac{9x^8-5}{1}=4$$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۱۴- **گزینهٔ «۱»** (علیرضا نداف‌زاده)

لازم است که ابتدا ضابطه تابع را ساده کنیم:

$$f(x)=\sin^2 ax(1-\sin^2 ax)=\sin^2 ax\cos^2 ax$$

$$=\frac{1}{4}(4\sin^2 ax\cos^2 ax)=\frac{1}{4}(\sin^2 2ax)=\frac{1}{4}\left(\frac{1-\cos 4ax}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{8}(1-\cos 4ax)$$

دورهٔ تناوب f از رابطهٔ $T=\frac{2\pi}{4|a|}=\frac{\pi}{2|a|}$ به‌دست می‌آید.

$$\Rightarrow\frac{\pi}{2|a|}=\frac{\pi}{8}\Rightarrow|a|=4$$

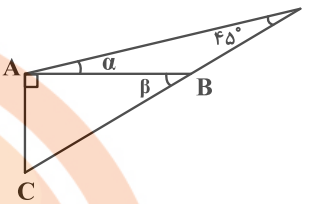
$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{8}(1-\cos 16x)$$

تلاشی درمسیر موفقیت

$$\Rightarrow f(\frac{\pi}{12}) = \frac{1}{8}(1-\cos\frac{4\pi}{3}) = \frac{1}{8}(1+\cos\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{8}(\frac{3}{2}) = \frac{3}{16}$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۱۵- **گزینهٔ «۱»** (علیرضا نداف‌زاده)



β زاویه خارجی محسوب می‌شود و $\beta = \alpha + 45^\circ$ ، پس داریم:

$$\frac{AC}{AB} = \tan\beta = \tan(\alpha+45^\circ) = \frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha} = \frac{1+(\frac{1}{2})}{1-(\frac{1}{2})} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{1}{3}$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحهٔ ۴۲)

۱۶- **گزینهٔ «۲»** (علیرضا نداف‌زاده)

ابتدا دامنه تابع $y = \frac{1}{\tan x - \cot x}$ و ضابطه ساده شدهٔ آن‌را به‌دست می‌آوریم:

$$\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi$$

$$\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

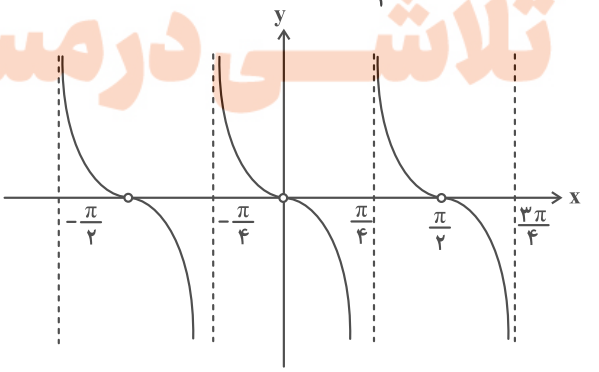
$$\tan x \neq \cot x \Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

با استفاده از اتحاد $\cot\theta - \tan\theta = 2\cot 2\theta$ ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{1}{-2\cot 2ax} = -\frac{1}{2}\tan 2ax$$

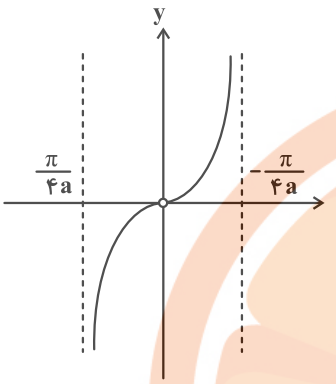
حال نمودار تابع $y = -\frac{1}{2}\tan 2x$ مطابق شکل زیر است:



زیرا:

$$\lim_{x \to \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}} y = \pm\infty, \quad \lim_{x \to \frac{k\pi}{2}} y = 0$$

نمودار تابع f از تقسیم طول نقاط نمودار تابع $y = -\frac{1}{2}\tan 2x$ بر a به دست می‌آید و از آنجا که تابع f اکیداً صعودی است، $a < 0$ است، پس داریم:



پس $-\frac{\pi}{4a} = \frac{\pi}{8}$ و در نتیجه $a = -2$ است.

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}\tan 4x$$

$$\Rightarrow f(\frac{2\pi}{3}) = \frac{1}{2}\tan\frac{8\pi}{3} = \frac{1}{2}\tan(3\pi - \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۴)

۱۷- **گزینهٔ «۳»** (علیرضا نداف‌زاده)

ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = a - \frac{b}{2}\sin(2cx + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow f(x) = a - \frac{b}{2}\cos(2cx)$$

با مقایسه نمودارهای دو تابع f و $y = \cos x$ ، می‌بینیم که $-b > 0$ یا $b < 0$ است، اما c می‌تواند هر علامتی داشته‌باشد. حال داریم:

$$\begin{cases} y_{max} = a - \frac{b}{2} = 3 \\ y_{min} = a + \frac{b}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = -4$$

از طرفی $\frac{3}{2}$ برابر دوره تناوب، برابر $\frac{4\pi}{3}$ است، پس $T = \frac{8\pi}{9}$ است و داریم:

$$T = \frac{2\pi}{2|c|} = \frac{8\pi}{9} \Rightarrow |c| = \frac{9}{8}$$

$$\Rightarrow a|c| + \frac{b}{2} = \frac{9}{8} - 2 = -\frac{7}{8}$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

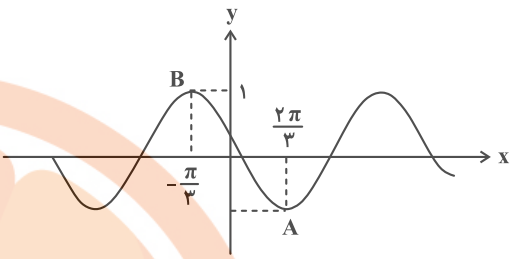
۱۸- **گزینهٔ «۳»** (علیرضا نداف‌زاده)

در تابع داده شده $f(0) = 1$ و بیش‌ترین مقدار برابر ۳ است:

$$\begin{cases} f(0) = a + b\cos\frac{\pi}{3} = 1 \\ y_{max} = a + |b| = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + \frac{b}{2} = 1 \\ a + |b| = 3 \end{cases} \quad (*)$$

تلاش در مسیر موفقیت

برای بحث در مورد پارامترهای b و c ابتدا نمودار تابع $g(x)=\cos(x+\frac{\pi}{3})$ را رسم می‌کنیم:



با مقایسه نمودارهای دو تابع f و g، می‌توان نتیجه گرفت که نمودار تابع g یا نسبت به هیچ‌کدام از محورهای مختصات قرینه نشده است و یا نسبت به هر دو محور (مبدأ مختصات) قرینه شده است، تا به نمودار تابع f تبدیل شود.

پس در دو حالت بررسی می‌کنیم:

الف) $b<۰, c<۰$

یعنی نمودار تابع g نسبت به مبدأ مختصات قرینه شده است، پس طول متناظر نقطه B واقع بر نمودار تابع f برابر $\frac{\pi}{۷}$ است.

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{۳c}=\frac{\pi}{۷}\Rightarrow c=-\frac{۷}{۳}$$

از طرفی داریم:

$$\xrightarrow{*}\begin{cases}a+\frac{b}{۲}=۱\\ a-b=۳\end{cases}\Rightarrow a=\frac{۵}{۳}, b=-\frac{۴}{۳}$$

اما کم‌ترین مقدار تابع $f(x)=\frac{۵}{۳}-\frac{۴}{۳}\cos(\frac{\pi}{۳}-\frac{۷}{۳}x)$ برابر $\frac{۱}{۳}$ است که با نمودار داده شده تطابق ندارد.

ب) $b>۰, c>۰$

یعنی نمودار تابع g نسبت به هیچ‌کدام از محورهای مختصات قرینه نشده است، پس طول متناظر نقطهٔ A روی نمودار تابع f برابر $\frac{\pi}{۷}$ است.

$$\Rightarrow \frac{۲\pi}{۳c}=\frac{\pi}{۷}\Rightarrow c=\frac{۱۴}{۳}$$

و از طرف دیگر داریم:

$$\xrightarrow{(*)}\begin{cases}a+\frac{b}{۲}=۱\\ a+b=۳\end{cases}\Rightarrow a=-۱, b=۴$$

پس نمودار رسم شده مربوط به تابع $f(x)=۴\cos(\frac{۱۴}{۳}x+\frac{\pi}{۳})-۱$ است.

$$\Rightarrow f(\frac{\pi}{۲})=۴\cos(\frac{۷\pi}{۳}+\frac{\pi}{۳})-۱=۴\cos(\frac{۸\pi}{۳})-۱=۴\cos(۳\pi-\frac{\pi}{۳})-۱$$

$$=-۴\cos\frac{\pi}{۳}-۱=۴(-\frac{۱}{۲})-۱=-۳$$

(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۱۹- **گزینهٔ «۱»** *(علیرضا نداف‌زاده)*

ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۱-\sin^۲x-\sin x=\frac{۱}{۴}\Rightarrow \sin^۲x+\sin x-\frac{۳}{۴}=۰$$

پس داریم:

$$(\sin x+\frac{۳}{۲})(\sin x-\frac{۱}{۲})=۰\xrightarrow{-۱\le\sin x\le ۱}\sin x=\frac{۱}{۲}$$

در بازهٔ $[-\frac{\pi}{۲},\pi[$ سینوس دو زاویه $x_۱=\frac{\pi}{۶}$ و $x_۲=\frac{۵\pi}{۶}$ برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

$$\Rightarrow \alpha=x_۲-x_۱=\frac{۲\pi}{۳}$$

و در نهایت داریم:

$$\tan(\alpha+\frac{\pi}{۴})=\tan(\frac{۲\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴})=\frac{۱+\tan\frac{۲\pi}{۳}}{۱-\tan\frac{۲\pi}{۳}}=\frac{۱-\sqrt{۳}}{۱+\sqrt{۳}}=\sqrt{۳}-۲$$

(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۲۰- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا نداف‌زاده)*

از تغییر متغیر $\frac{۱}{\sin x\cos x}=A$ استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow A^۲+۲A-۴=۰\Rightarrow A=-۱\pm\sqrt{۵}$$

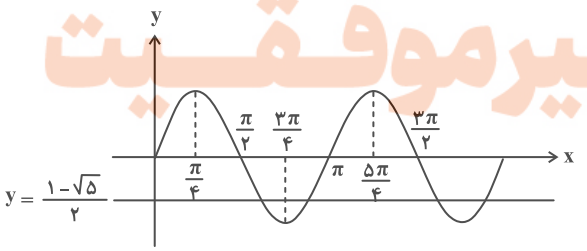
پس داریم:

$$A=\frac{۲}{\sin ۲x}=-۱\pm\sqrt{۵}\Rightarrow \sin ۲x=\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$$

که حالت $\sin ۲x=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ امکان‌پذیر نیست.

$$\Rightarrow \sin ۲x=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$$

نمودار تابع $y=\sin ۲x$ مطابق شکل زیر است:



مطابق شکل، خط $y=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$ نمودار تابع $y=\sin ۲x$ را در بازهٔ $(۰, \frac{۳\pi}{۲})$ در ۲ نقطه قطع می‌کند.

(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

تلاشی در مسیر موفقیت

۲۱- **گزینهٔ «۱»** *(کیوان دارابی)*

$$(۱۲a^۲ , ۹ab) = ۳|a|(۴a , ۳b)$$

اما b عددی فرد است پس عامل ۲ را ندارد. در نتیجه $۳b$ نیز عامل ۲ را ندارد. بنابراین عامل ۲ در این ب. م بی‌تأثیر است و می‌توانیم آن را کنار بگذاریم:

$$(۴a , ۳b) = (a , ۳b)$$

از طرفی $a|b$ بنابراین $a|۳b$ و در نتیجه: $(a , ۳b) = |a|$

بنابراین: $(۱۲a^۲ , ۹ab) = ۳|a| \times |a| = ۳a^۲$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۳، ۱۶ و ۱۷)

۲۲- **گزینهٔ «۴»** *(محمد صحت‌کار)*

مجموعهٔ A مجموعهٔ مضارب طبیعی مشترک اعداد ۹۹ و ۵۴ است. مجموعهٔ مضارب مشترک دو عدد، مجموعهٔ مضارب ک. م. م آن دو عدد است. بنابراین باید ابتدا ک. م. م ۹۹ و ۵۴ را به دست آوریم:

$$[۹۹ , ۵۴] = [۳^۲ \times ۱۱ , ۲ \times ۳^۳] = ۲ \times ۳^۳ \times ۱۱ = ۵۹۴$$

$$A = \{۵۹۴ , ۲ \times ۵۹۴ , ۳ \times ۵۹۴ , ...\} = \{۵۹۴ , ۱۱۸۸ , ۱۷۸۲ , ...\}$$

دومین عضو این مجموعه عدد ۱۱۸۸ است.

برای یافتن رقم یکان عدد $۱۱۸۸^{۱۱۸۸}$ باید باقی‌ماندهٔ تقسیم آن را بر ۱۰ بیابیم:

$$۱۱۸۸^{۱۱۸۸} \overset{۱۰}{\equiv} ۸^{۱۱۸۸}$$

حالا باید توان یعنی ۱۱۸۸ را بر ۴ تقسیم کنیم: $۱۱۸۸ \overset{۴}{\equiv} ۰$

بنابراین باید به جای ۱۱۸۸ عدد ۴ را قرار دهیم:

$$۱۱۸۸^{۱۱۸۸} \overset{۱۰}{\equiv} ۸^{۱۱۸۸} \overset{۱۰}{\equiv} ۸^۴ \overset{۱۰}{\equiv} (-۲)^۴ \overset{۱۰}{\equiv} ۱۶ \overset{۱۰}{\equiv} ۶$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۲۳- **گزینهٔ «۴»** *(کیوان دارابی)*

طبق فرض داریم:

$$a = b \times ۱۹ + ۲۰ \quad , \quad r < b \Rightarrow ۲۰ < b$$

از طرفی:

$$a = ۷k + ۳ \Rightarrow a \overset{۷}{\equiv} ۳ \Rightarrow ۱۹b + ۲۰ \overset{۷}{\equiv} ۳$$

$$\Rightarrow ۱۹b \overset{۷}{\equiv} -۱۷ \Rightarrow -۲b \overset{۷}{\equiv} ۴ \Rightarrow b \overset{۷}{\equiv} -۲ \overset{۷}{\equiv} ۵$$

بنابراین:

$$b \overset{۷}{\equiv} ۵ \Rightarrow b = ۷k' + ۵ \quad , \quad ۲۱ \le b \Rightarrow b_{min} = ۷ \times ۳ + ۵ = ۲۶$$

$$a_{min} = b \times ۱۹ + ۲۰ = ۲۶ \times ۱۹ + ۲۰ = ۵۱۴$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ارقام} = ۵ + ۱ + ۴ = ۱۰$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۴، ۱۵، ۱۹ تا ۲۲)

۲۴- **گزینهٔ «۱»** *(خرزاد جوادی)*

طبق فرض داریم:

$$\overline{۳۱۰۲۴a} \overset{۱۱}{\equiv} ۱ \Rightarrow a - ۴ + ۲ - ۰ + ۱ - ۳ \overset{۱۱}{\equiv} ۱$$

$$\Rightarrow a \overset{۱۱}{\equiv} ۵ \Rightarrow a = ۱۱k + ۵ \Rightarrow a \in \{... , -۶ , ۵ , ۱۶ , ۲۷ , ...\}$$

a یک رقم است پس a فقط می‌تواند ۵ باشد. بنابراین:

$$۵۵۳۵ \overset{۹}{\equiv} ۵ + ۵ + ۳ + ۵ \overset{۹}{\equiv} ۱۸ \overset{۹}{\equiv} ۰$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۲۵- **گزینهٔ «۱»** *(خرزاد جوادی)*

اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $۱۰! - ۳^{۱۴۰۲} + ۷^{۱۴۰۲}$ بر ۲۱ را r بنامیم آن‌گاه خواهیم داشت:

$$۳^{۱۴۰۲} + ۷^{۱۴۰۲} - ۱۰! \overset{۲۱}{\equiv} r$$

با توجه به رابطهٔ (پیمانهٔ ab) $(a+b)^n \equiv a^n + b^n$ خواهیم داشت:

$$۳^{۱۴۰۲} + ۷^{۱۴۰۲} \overset{۲۱}{\equiv} (۳+۷)^{۱۴۰۲} \overset{۲۱}{\equiv} ۱۰^{۱۴۰۲}$$

حالا باقی‌ماندهٔ تقسیم $۱۰^{۱۴۰۲}$ را یک بار بر ۳ و یک بار بر ۷ پیدا می‌کنیم:

$$۱۰^{۱۴۰۲} \overset{۳}{\equiv} ۱^{۱۴۰۲} \overset{۳}{\equiv} ۱$$

$$۱۰^{۱۴۰۲} \overset{۷}{\equiv} ۳^{۱۴۰۲}$$

برای پیدا کردن باقی‌ماندهٔ تقسیم $۳^{۱۴۰۲}$ بر ۷ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$۳^۲ \overset{۷}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۳^۳ \overset{۷}{\equiv} ۶ \overset{۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۳^۶ \overset{۷}{\equiv} ۱$$

اگر طرفین این رابطه را به توان ۲۳۳ برسانیم خواهیم داشت:

$$۳^{۱۳۹۸} \overset{۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۳^{۱۴۰۲} \overset{۷}{\equiv} ۳^۴ \overset{۷}{\equiv} ۸۱ \overset{۷}{\equiv} ۴$$

حالا می‌توانیم باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $۱۰^{۱۴۰۲}$ بر ۲۱ را به صورت زیر حساب کنیم:

$$\begin{cases} ۱۰^{۱۴۰۲} \overset{۳}{\equiv} ۱ \overset{۳}{\equiv} ۴ \\ ۱۰^{۱۴۰۲} \overset{۷}{\equiv} ۴ \end{cases} \Rightarrow ۱۰^{۱۴۰۲} \overset{۲۱}{\equiv} ۴$$

از طرفی دیگر در تجزیهٔ عدد $۱۰!$ هم عامل ۳ هم عامل ۷ وجود دارد پس این عدد بر ۲۱ بخش‌پذیر است و بنابراین:

$$۳^{۱۴۰۲} + ۷^{۱۴۰۲} - ۱۰! \overset{۲۱}{\equiv} ۱۰^{۱۴۰۲} - ۱۰! \overset{۲۱}{\equiv} ۴ - ۰ \overset{۲۱}{\equiv} ۴$$

پس $r = ۴$ است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۹ تا ۲۲، ۲۹ و ۳۰)

۲۶- **گزینهٔ «۲»** *(مهرداد ملوندی)*

شرط وجود جواب معادلهٔ سیالهٔ $(۲m-۱)x + (m+۱)y = ۱۱$ آن است که:

$$(۲m-۱ , m+۱) | ۱۱$$

فرض می‌کنیم ب. م. م اعداد $۲m-۱$ و $m+۱$ برابر با d باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{cases} d | ۲m-۱ \\ d | m+۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d | ۲m-۱ \\ d | ۲m+۲ \end{cases} \Rightarrow d | ۳ \Rightarrow d = ۱ \text{ یا } d = ۳$$

با توجه به این‌که ۱۱ مضرب ۳ نیست پس باید $(۲m-۱ , m+۱) = ۱$ باشد.

برای یافتن تعداد اعداد مطلوب مانند m فرض می‌کنیم که ب. م. م اعداد $۲m-۱$ و $m+۱$ برابر با ۳ باشد. در این شرایط خواهیم داشت:

$$۳ | m+۱ \Rightarrow m+۱ = ۳k \Rightarrow m = ۳k-۱$$

برای یافتن تعداد اعدادی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ..., ۴۰\}$ که به شکل $۳k-۱$ هستند می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم:

$$۱ \le ۳k-۱ \le ۴۰ \Rightarrow ۱ \le k \le ۱۳$$

بنابراین به ازای ۱۳ عضو مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ..., ۴۰\}$ ب. م. م اعداد $۲m-۱$ و $m+۱$ برابر ۳ است. پس تعداد اعداد مطلوب برابر است با:

$$۴۰-۱۳=۲۷$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۲۶ تا ۲۹)

۲۷- **گزینهٔ «۳»** *(مصطفی دیداری)*

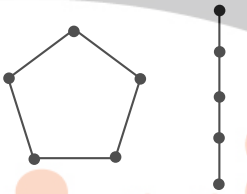
گراف C_n، گرافی ۲ منتظم است. بنابراین درجهٔ هر n رأس برابر با ۲ است و حاصل‌ضرب درجات این رأس‌ها برابر با ۲^n خواهد بود.

هر گراف P_n، دو رأس درجهٔ ۱ و $(n-۲)$ رأس درجهٔ ۲ دارد. پس حاصل‌ضرب درجات این رأس‌ها نیز برابر با $۲^{(n-۲)}$ است.

بنابراین حاصل‌ضرب درجات تمام رأس‌های این گراف برابر با $۲^n \times ۲^{(n-۲)} = ۲^{(۲n-۲)}$ است و در نتیجه خواهیم داشت:

$$۲^{(۲n-۲)} = ۲۵۶ = ۲^۸ \Rightarrow ۲n-۲=۸ \Rightarrow ۲n=۱۰ \Rightarrow n=۵$$

مطابق شکل، گراف $C_۵$ دارای ۵ یال و گراف $P_۵$ دارای ۴ یال است. پس این گراف ۱۰ رأس و $۹=۴+۵$ یال دارد.



تعداد یال‌های گراف مکمل این گراف به صورت زیر به دست می‌آید:

$$q(\bar{G}) = q(K_{۱۰}) - q(G) = \frac{۱۰\times۹}{۲} - ۹ = ۴۵-۹=۳۶$$

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۲۸- **گزینهٔ «۱»** *(محمد صحت‌کار)*

در گراف‌های P_n اگر طول مسیر برابر با r باشد آن‌گاه دو رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\begin{cases} \binom{n}{۲} = \text{تعداد کل مسیرها بین دو رأس متمایز} \\ n-r = \text{تعداد مسیرهای به طول } r \end{cases}$$

بنابراین:

$$\binom{n}{۲} = ۴۵ \Rightarrow n=۱۰$$

در گراف $P_{۱۰}$ طول مسیر حداکثر می‌تواند برابر ۹ باشد. بنابراین:

$$\text{تعداد مسیرهای طول } ۷ = ۱۰-۷=۳$$
$$\text{تعداد مسیرهای طول } ۸ = ۱۰-۸=۲$$
$$\text{تعداد مسیرهای طول } ۹ = ۱۰-۹=۱$$

پس تعداد مسیرهای مطلوب برابر است با: $۱+۲+۳=۶$

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)

۲۹- **گزینهٔ «۲»** *(محمد صحت‌کار)*

این گراف ۶ رأس دارد. اگر گراف G گرافی کامل بود $q(K_۶) = \binom{۶}{۲} = ۱۵$ یال داشت. با توجه به آن‌که گراف G دارای ۱۴ یال است پس این گراف، گرافی کامل بوده که یک یال آن حذف شده است. فرض می‌کنیم که یال حذف شده یال ab باشد. پس باید ابتدا تعداد کل دورهای به طول ۴ در گراف کامل مرتبهٔ ۶ را حساب کنیم و سپس تعداد دورهای به طول ۴ که شامل یال ab هستند را از آن کم کنیم:

$$\text{تعداد کل دورهای به طول ۴ در گراف کامل مرتبهٔ ۶} = \binom{۶}{۴} \times \frac{۳!}{۲}$$
$$= ۱۵ \times ۳ = ۴۵$$

حالا باید تعداد دورهای به طول ۴ شامل یال ab را حساب کنیم. هر دور به طول ۴ شامل یال ab به صورت $abxya$ است که x و y دو رأس از میان رأس‌های c، d، e و f هستند. بنابراین:

تعداد دورهای به طول ۴ شامل یال ab در گراف کامل مرتبهٔ ۶

$$= \binom{۴}{۲} \times ۲! = ۶ \times ۲ = ۱۲$$

در این محاسبه، $۲!$ برای جایگشت‌های رأس‌های x و y در نظر گرفته شده است. بنابراین تعداد دورهای به طول ۴ در گراف G برابر است با:

$$۴۵-۱۲=۳۳$$

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۳۷ تا ۳۹)

۳۰- **گزینهٔ «۴»** *(احمدرضا فلاح)*

اگر m یال از یک گراف حذف کنیم از مجموع درجات رأس‌های این گراف $۲m$ واحد کم می‌شود. بنابراین: $۳p-۱۱=۲m$

از طرفی دیگر گراف حاصل گرافی ۸- منتظم است. مجموع درجات گراف K_p برابر با $p(p-۱)$ و مجموع درجات رأس‌های گراف ۸- منتظم برابر با $۸p$ است. بنابراین:

$$p(p-۱)-(۳p-۱۱)=۸p \Rightarrow p^۲-p-۳p+۱۱=۸p$$
$$\Rightarrow p^۲-۱۲p+۱۱=۰ \Rightarrow (p-۱)(p-۱۱)=۰$$
$$\Rightarrow p=۱ \text{ یا } p=۱۱$$

p نمی‌تواند برابر ۱ باشد پس p برابر با ۱۱ است. بنابراین:

$$۳\times۱۱-۱۱=۲m \Rightarrow ۲m=۲۲ \Rightarrow m=۱۱$$

حالا باید از گراف کامل مرتبهٔ ۱۱، $۲۲=۲\times۱۱$ یال حذف کنیم. تعداد یال‌های گراف کامل مرتبهٔ ۱۱ برابر با $۵۵ = \frac{۱۱\times۱۰}{۲}$ است. اگر از این ۵۵ یال، ۲۲ یال را حذف کنیم ۳۳ یال باقی می‌ماند. می‌دانیم که مجموع درجات رأس‌های هر گراف برابر با دو برابر تعداد یال‌هاست. پس حاصل جمع درجات رأس‌های این گراف برابر با $۶۶ = ۲\times۳۳$ است.

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰)

۳۱- **گزینهٔ «۴»** (محمد صحت‌کار)

ماتریس‌های A و B وارون یکدیگرند بنابراین:

$$AB = BA = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow BA$ درایهٔ سطر اول ستون اول ماتریس

$$= \begin{bmatrix} x & 1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 \\ x \\ -3 \end{bmatrix} = 1 \Rightarrow 7x + x - 15 = 1$$

$$\Rightarrow 8x = 16 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |C| = 2 - (-5) = 7$$

$$|C^{-1}| = \frac{1}{|C|} = \frac{1}{7}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۲، ۲۳ و ۳۱)

۳۲- **گزینهٔ «۲»** (سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)

می‌دانیم ماتریس اسکالر مضربی از ماتریس واحد است پس $A = kI$ و داریم:

$$A^3 = k^3 I \quad , \quad A^2 = k^2 I$$

$$\Rightarrow k^3 I = k^2 I + 2kI \Rightarrow \underbrace{k^3 - k^2 - 2k}_{k(k-2)(k+1)} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = 0 \Rightarrow |A| = 0 \\ k = -1 \Rightarrow |A| = 1 \\ k = 2 \Rightarrow |A| = 4 \end{cases}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۲ و ۲۷)

۳۳- **گزینهٔ «۱»** (مهرداد ملوندی)

دستگاه معادلات $\begin{cases} kx + my = 1 \\ (2k+1)x + ny = 1 \end{cases}$ فاقد جواب است، پس:

$$\frac{k}{2k+1} = \frac{m}{n} \neq \frac{1}{1} \qquad (1)$$

از طرفی دستگاه معادلات $\begin{cases} mx + ny = m - n \\ 2x + (k+3)y = m + n \end{cases}$ بی‌شمار جواب دارد، پس:

$$\frac{m}{2} = \frac{n}{k+3} = \frac{m-n}{m+n} \qquad (2) \qquad \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{2}{k+3} \qquad (3)$$

$$\xrightarrow{(1),(3)} \frac{k}{2k+1} = \frac{2}{k+3} \Rightarrow k^2 + 3k = 4k + 2$$

$$\Rightarrow k^2 - k - 2 = 0 \Rightarrow (k-2)(k+1) = 0 \Rightarrow k = 2, -1$$

به ازای $k = -1$، رابطهٔ (۱) برقرار نیست، پس $k = 2$ و داریم:

$$\xrightarrow{(2)} \frac{m}{2} = \frac{\overbrace{n = \frac{5}{2}m}^{}}{5} = \frac{m-n}{m+n}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2} = \frac{m - \frac{5}{2}m}{m + \frac{5}{2}m} = \frac{-\frac{3}{2}m}{\frac{7}{2}m} = -\frac{3}{7} \Rightarrow m = -\frac{6}{7}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۳۴- **گزینهٔ «۳»** (اسحاق اسفندیار)

ماتریس A وارون‌پذیر نیست، پس:

$$|A| = 0 \Rightarrow 2^{3(a^2-a)} \times 2^{2a} - 2^3 \times 2^2 = 0 \Rightarrow 2^{3a^2-2a} = 2^5$$

$$3a^2 - 2a = 5 \Rightarrow a = -1 \ , \ a = \frac{5}{3} \xrightarrow{a \geq 0} a = \frac{5}{3}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & 6 \\ \frac{5}{3} & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

B^{-1} مجموع درایه‌های $= -\frac{3}{5} + \frac{6}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{3}{5}$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۳ و ۲۴)

۳۵- **گزینهٔ «۲»** (کیوان دارابی)

اگر ماتریس جدید را B بنامیم، آن‌گاه $b_{12} = 2a_{12} = 2 \times 2 = 4$ و

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3m & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین: $b_{32} = ma_{32} = 3m$.

حال $|A| = |B|$؛ برای این منظور کافی است فقط اختلاف دو دترمینان را محاسبه کرده و برابر با صفر قرار دهیم:

$$|B| - |A| = 0$$

$$\Rightarrow (4-2) \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (3m-3) \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 2 + 7(3m-3) = 0 \Rightarrow 21m - 19 = 0 \Rightarrow m = \frac{19}{21}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۳۰)

۳۶- **گزینهٔ «۲»** (کیوان دارابی)

مطابق فرض داریم:

$$||A|A + A| = 192 \Rightarrow |(|A|+1)A| = 192$$

$$\Rightarrow (|A|+1)^3 \times |A| = 192 = 4^3 \times 3 \Rightarrow |A| = 3$$

$$\Rightarrow ||2A|A| = |2A|^3 |A| = (2^3 |A|)^3 |A|$$

$$= 2^9 |A|^4 = 2^9 \times 3^4 = (2^2 \times 3)^4 \times 2 = 12^4 \times 2$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۱)

۳۷- **گزینهٔ «۴»** (محمد صحت‌کار)

اندازهٔ مماس مشترک خارجی دو دایره از رابطهٔ $TT' = \sqrt{d^2 - (r - r')^2}$ به دست می‌آید که در آن d فاصلهٔ مراکز دو دایره و r و r' اندازهٔ شعاع‌های دو دایره است.

مرکز دایره به معادلهٔ $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$ نقطهٔ $C'(3, 1)$ است. اندازهٔ شعاع این دایره برابر است با:

$$r' = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 4 - 24} = \frac{1}{2}\sqrt{16} = 2$$

بنابراین:

$$TT' = \sqrt{d^2 - (5-2)^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow d^2 - 9 = 8$$

$$\Rightarrow d^2 = 17 \Rightarrow d = \sqrt{17}$$

پس فاصلهٔ مراکز دو دایره برابر با $\sqrt{17}$ است. برای یافتن مختصات نقطهٔ C باید همهٔ گزینه‌ها را بررسی کنیم:

گزینهٔ «۱»: فاصلهٔ نقطهٔ $(5\ ,\ -2)$ از نقطهٔ $C'(3\ ,\ 1)$ برابر است با:

$$\sqrt{25+16} = \sqrt{41}$$

گزینهٔ «۲»: فاصلهٔ نقطهٔ $(3\ ,\ 2)$ از نقطهٔ $C'(3\ ,\ 1)$ برابر است با:

$$\sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

گزینهٔ «۳»: فاصلهٔ نقطهٔ $(3\ ,\ -2)$ از نقطهٔ $C'(3\ ,\ 1)$ برابر است با:

$$\sqrt{25+4} = \sqrt{29}$$

گزینهٔ «۴»: فاصلهٔ نقطهٔ $(5\ ,\ 2)$ از نقطهٔ $C'(3\ ,\ 1)$ برابر است با:

$$\sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

پس نقطهٔ مطلوب نقطهٔ $C(2\ ,\ 5)$ است.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۴)

۳۸- **گزینهٔ «۱»** *(هومن عقیلی)*

ابتدا باید اندازهٔ وتر AB را حساب کنیم. اگر از مرکز دایرهٔ $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ یعنی نقطهٔ $O(1\ ,\ 1)$ خطی عمود بر وتر AB رسم کنیم تا در نقطهٔ H این وتر را قطع کند آن‌گاه خواهیم داشت:

$$AH^2 = r^2 - OH^2$$

اندازهٔ پاره‌خط OH برابر با فاصلهٔ نقطهٔ $O(1\ ,\ 1)$ از خط $3x+4y-2=0$ است:

$$OH = \frac{|3+4-2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{5}{5} = 1$$

اندازهٔ شعاع دایرهٔ $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ برابر با ۲ است. بنابراین:

$$AH^2 = r^2 - OH^2 = 4-1 = 3 \Rightarrow AH = \sqrt{3} \Rightarrow AB = 2\sqrt{3}$$

حالا باید معادلهٔ دایره‌ای را بیابیم که مرکزش نقطهٔ $C(\frac{1}{4}\ ,\ 0)$ است و بر خط $3x+4y-2=0$ وتر AB به طول $2\sqrt{3}$ را جدا می‌کند. برای این کار باید اندازهٔ شعاع این دایره را حساب کنیم. اگر اندازهٔ شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر با R باشد، آن‌گاه:

$$R^2 = AH^2 + CH^2$$

اندازهٔ پاره‌خط CH برابر با فاصلهٔ نقطهٔ $C(\frac{1}{4}\ ,\ 0)$ از خط $3x+4y-2=0$ است:

$$CH = \frac{|\frac{3}{4}+0-2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{\frac{5}{4}}{5} = \frac{1}{4} \Rightarrow R^2 = (\sqrt{3})^2 + (\frac{1}{4})^2 = \frac{49}{16}$$

بنابراین معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر به صورت زیر خواهد بود:

$$(x-\frac{1}{4})^2 + y^2 = \frac{49}{16} \Rightarrow x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} + y^2 = \frac{49}{16}$$

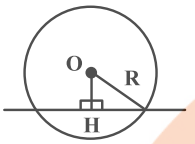
$$\Rightarrow 16x^2 - 8x + 1 + 16y^2 = 49 \Rightarrow 16x^2 + 16y^2 - 8x - 48 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - x - 6 = 0$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۳ تا ۴۵)

۳۹- **گزینهٔ «۳»** *(هومن عقیلی)*

خط و دایره متقاطعند یعنی: $OH < R$؛ مختصات مرکز دایره می‌شود $O(-\frac{a}{2}=1\ ,\ -\frac{b}{2}=2)$ و شعاع دایره برابر است با:



$$R = \frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2} = 1$$

OH فاصلهٔ مرکز دایره تا خط $3x+4y-m=0$ است که می‌شود:

$$OH = \frac{|3+8-m|}{\sqrt{9+16}}$$

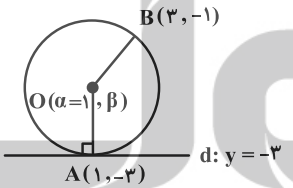
$$OH < R \Rightarrow \frac{|11-m|}{5} < 1 \Rightarrow |11-m| < 5$$

$$\Rightarrow -5 < 11-m < 5 \Rightarrow 6 < m < 16$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۳ تا ۴۵)

۴۰- **گزینهٔ «۲»** *(امیررضا فلاح)*

نقطهٔ $A(1\ ,\ -3)$ روی خط $d: y=-3$ قرار دارد. بدیهی است مختصات مرکز دایره به صورت $O(\alpha=1\ ,\ \beta)$ است. از طرفی $|OA| = |OB|$ و داریم:



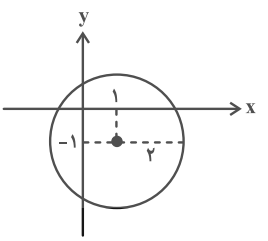
$$\sqrt{(1-1)^2 + (\beta+3)^2} = \sqrt{(1-3)^2 + (\beta+1)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \beta^2 + 6\beta + 9 = 4 + \beta^2 + 2\beta + 1$$

$$\Rightarrow 4\beta = -4 \Rightarrow \beta = -1 \Rightarrow O(1\ ,\ -1)$$

$$R = |OA| = \sqrt{(1-1)^2 + (-3+1)^2} = 2$$

مطابق شکل بیشترین فاصلهٔ محیط این دایره تا محور yها برابر ۳ واحد می‌باشد.



(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۳ تا ۴۶)

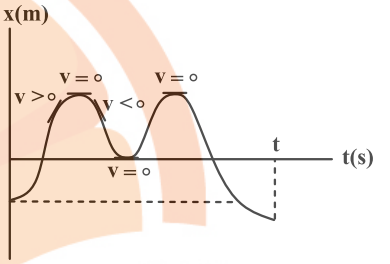
تلاش در مسیر موفقیت

فیزیک

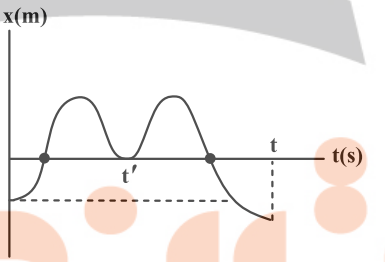
۴۱- گزینهٔ «۲» *(مسام نادری)*

بررسی موارد:

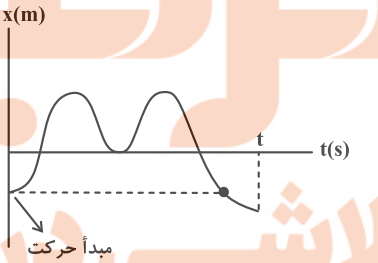
الف) درست؛ در نمودار مکان- زمان، لحظه‌ای که شیب خط مماس (یعنی سرعت لحظه‌ای) در آن صفر شود و علامت قبل و بعدش تغییر کند، لحظهٔ تغییر جهت است که طبق شکل زیر، سه بار این اتفاق می‌افتد.



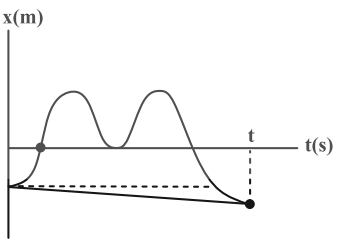
ب) نادرست؛ لحظه‌ای که نمودار، محور زمان را قطع کند و از آن عبور کند، لحظه‌ای است که از مبدأ مکان یعنی $x=0$ به‌طور کامل عبور کرده است که طبق شکل زیر دو بار این اتفاق می‌افتد. دقت کنید که در لحظهٔ t'، متحرک به مبدأ مکان رسیده ولی از آن به‌طور کامل عبور نکرده است.



ج) نادرست؛ بعد از آغاز حرکت، متحرک تنها یک بار از مبدأ حرکت عبور کرده است.



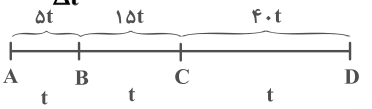
د) نادرست؛ در نمودار مکان- زمان، شیب خط واصل بین دو نقطه، سرعت متوسط را نشان می‌دهد که طبق شکل زیر، سرعت متوسط از لحظهٔ صفر تا t، منفی می‌شود.



(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲ تا ۱۳)

۴۲- گزینهٔ «۴» *(مجتبی نکوئیان)*

مطابق شکل زیر و با توجه به رابطهٔ تندی متوسط $\left(s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\right)$ داریم:



$$s_{av_{CD}}=\frac{\overline{CD}}{t}=۴۰\Rightarrow \overline{CD}=۴۰t$$

اختلاف تندی مسیر AB و BC، $۱۰\frac{m}{s}$ است و طول مسیر BC، سه برابر AB است. با توجه به برابری زمان، تندی مسیر BC، $۱۰\frac{m}{s}$ بیشتر از AB است، بنابراین:

$$s_{av_{BC}}-s_{av_{AB}}=۱۰\Rightarrow \frac{\overline{BC}}{t}-\frac{\overline{AB}}{t}=۱۰$$

$$\xrightarrow{\overline{BC}=۳\overline{AB}} \frac{۲\overline{AB}}{t}=۱۰\Rightarrow \overline{AB}=۵t$$

$$s_{av_T}=\frac{\ell_T}{\Delta t_T}=\frac{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}}{\Delta t_{AB}+\Delta t_{BC}+\Delta t_{CD}}$$

$$\Rightarrow s_{av_T}=\frac{۵t+۱۵t+۴۰t}{۳t}=۲۰\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱ تا ۱۰)

۴۳- گزینهٔ «۱» *(زهره آقامحمدی)*

ابتدا معادلهٔ مکان- زمان دو متحرک را می‌نویسیم. اگر مکان متحرک A در لحظهٔ شروع حرکت را مبدأ مختصات فرض کنیم، داریم:

$$x=vt+x_۰\Rightarrow \begin{cases} x_A=\frac{۳}{۲}vt \\ x_B=vt+۲۰۰ \end{cases}$$

دو بار فاصلهٔ دو متحرک از هم برابر ۵۰ متر است. یک بار قبل از رسیدن متحرک A به متحرک B و بار دوم پس از عبور متحرک A از متحرک B:

$$x_B-x_A=۵۰\Rightarrow vt_۱+۲۰۰-\frac{۳}{۲}vt_۱=۵۰$$

$$-\frac{۱}{۲}vt_۱=-۱۵۰\Rightarrow vt_۱=۳۰۰ \qquad (۱)$$

$$x_A-x_B=۵۰\Rightarrow \frac{۳}{۲}vt_۲-vt_۲-۲۰۰=۵۰$$

$$\frac{۱}{۲}vt_۲=۲۵۰\Rightarrow vt_۲=۵۰۰ \qquad (۲)$$

در نهایت از رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{t_۱}{t_۲}=\frac{۳}{۵}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

۴۴- گزینهٔ «۴» *(علیرضا جباری)*

ابتدا با استفاده از مقادیر داده شده روی نمودار، سرعت هر یک از دو متحرک را به دست می‌آوریم. باید توجه داشت که سرعت هر یک از دو متحرک ثابت است و می‌توان سرعت لحظه‌ای هر متحرک را با سرعت متوسط آن برابر دانست:

تلاشی در مسیر موفقیت

$$v = v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} v_A = \frac{۱۶-۰}{۶-۴} = ۸\frac{m}{s} \\ v_B = \frac{۱۶-۴۰}{۶-۰} = -۴\frac{m}{s} \end{cases}$$

سپس رابطهٔ سرعت متوسط را برای متحرک A در بازهٔ زمانی صفر تا $4s$ به کار می‌بریم و مکان اولیهٔ متحرک A را به دست می‌آوریم:

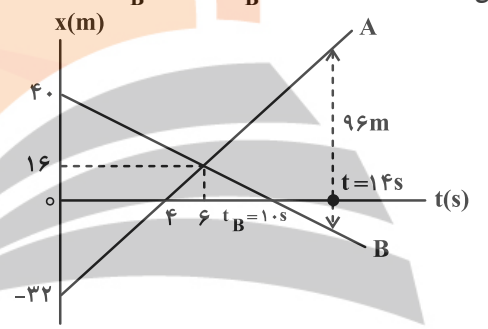
$$v_A = \frac{۰-x_{۰A}}{۴-۰} \xrightarrow{v_A=۸\frac{m}{s}} ۸ = \frac{-x_{۰A}}{۴} \Rightarrow x_{۰A} = -۳۲m$$

اکنون می‌توانیم معادلهٔ هر یک از دو متحرک را بنویسیم:

$$x = vt + x_۰ \Rightarrow \begin{cases} x_A = ۸t - ۳۲ \\ x_B = -۴t + ۴۰ \end{cases}$$

در لحظهٔ t_B که متحرک B از مبدأ مکان می‌گذرد، جهت بردار مکان آن تغییر می‌کند.

$$x_B = ۰ \Rightarrow ۰ = -۴t_B + ۴۰ \Rightarrow t_B = ۱۰s$$



در پایان، لحظه‌ای را که فاصلهٔ دو متحرک از یکدیگر $96m$ می‌شود به دست می‌آوریم و اختلاف آن را با لحظهٔ t_B حساب می‌کنیم:

$$x_A - x_B = ۹۶ \Rightarrow ۸t - ۳۲ - (-۴t + ۴۰) = ۹۶$$

$$۱۲t = ۱۶۸ \Rightarrow t = ۱۴s$$

$$t - t_B = ۱۴ - ۱۰ = ۴s$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

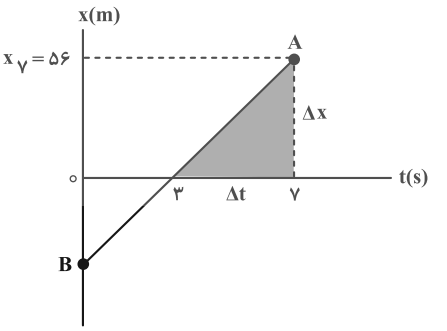
۴۵- **گزینهٔ «۱»** *(محمود منصوری)*

سرعت متوسط از ابتدای حرکت تا لحظهٔ $t = ۷s$ برابر $۸\frac{m}{s}$ است. بنابراین:

$$V_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow ۸ = \frac{\Delta x}{۷} \Rightarrow \Delta x = ۵۶m$$

$$\Rightarrow x_۷ - x_۰ = ۵۶m \xrightarrow{x_۰=۰} x_۷ = ۵۶m$$

سرعت متحرک در لحظهٔ $t = ۷s$ برابر با شیب خط مماس بر نمودار در آن لحظه یعنی همان شیب پاره‌خط AB است. برای محاسبهٔ شیب این خط از مثلث سایه‌خورده در شکل زیر استفاده می‌کنیم:



$$v_{t=۷} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۵۶}{۷-۳} = ۱۴\frac{m}{s}$$

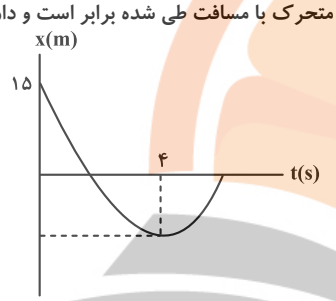
همچنین چون شیب خط مماس بر نمودار در مبدأ زمان برابر با صفر است، سرعت اولیه متحرک صفر است. بنابراین شتاب متوسط در ۷ ثانیهٔ اول حرکت برابر است با:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۱۴-۰}{۷-۰} = ۲\frac{m}{s^۲}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۰ تا ۱۲)

۴۶- **گزینهٔ «۴»** *(زهره آقامحمدی)*

متحرک در لحظهٔ $t = ۴s$ تغییر جهت می‌دهد. از لحظهٔ صفر تا $t = ۴s$ اندازهٔ جابه‌جایی متحرک با مسافت طی شده برابر است و داریم:



$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=۴s]{s_{av}=۴\frac{m}{s}} ۴ = \frac{\ell}{۴} \Rightarrow \ell = ۱۶m \Rightarrow |\Delta x| = ۱۶m$$

چون در این بازه جابه‌جایی خلاف جهت محور x است، داریم:

$$\Delta x = -۱۶m$$

اکنون با استفاده از معادلهٔ جابه‌جایی- سرعت متوسط در بازهٔ صفر تا $4s$، سرعت اولیه را به دست می‌آوریم. توجه کنید که در لحظهٔ $t = ۴s$، سرعت متحرک صفر است:

$$\frac{v_۴ + v_۰}{۲} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=۴s]{v_۴=۰ \,,\, \Delta x=-۱۶m} \frac{۰+v_۰}{۲} = \frac{-۱۶}{۴} \Rightarrow v_۰ = -۸\frac{m}{s}$$

سپس با استفاده از معادلهٔ سرعت- زمان، شتاب حرکت به دست می‌آید:

$$v = at + v_۰ \xrightarrow[v_۴=۰]{t=۴s} ۰ = ۴a - ۸ \Rightarrow a = ۲\frac{m}{s^۲}$$

در نهایت معادلهٔ مکان- زمان را می‌نویسیم و مکان متحرک را در لحظهٔ $10s$ محاسبه می‌کنیم:

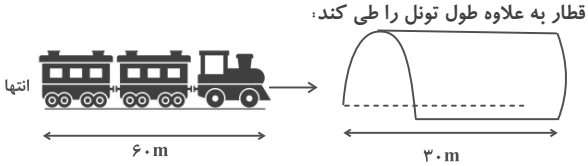
$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \xrightarrow[v_۰=-۸\frac{m}{s}]{a=۲\frac{m}{s^۲} \,,\, x_۰=۱۵m}$$

$$x = t^۲ - ۸t + ۱۵ \xrightarrow{t=۱۰s} x = ۱۰۰ - ۸۰ + ۱۵ = ۳۵m$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۴۷- **گزینهٔ «۳»** *(حسام نادری)*

برای خروج کامل قطار باید انتهای قطار کاملاً از تونل خارج شود، یعنی طول قطار به علاوه طول تونل را طی کند:



$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta x \xrightarrow[\Delta x=۹۰m]{a=-۵\frac{m}{s^۲}}$$

$$v_۰ = \sqrt{۱۶۰۰ - ۲\times(-۵)\times۹۰} = \sqrt{۱۶۰۰+۹۰۰} = \sqrt{۲۵۰۰} = ۵۰\frac{m}{s}$$

سرعت اولیهٔ قطار به دست آمد، حالا می‌توان زمان عبور قطار از تونل را به دست آورد:

$$v = at + v_0 \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{40 - 50}{-5} = 2s$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۷ و ۱۸)

۴۸- **گزینهٔ «۴»** (عبدالرضا امینی‌نسب)

در بازهٔ زمانی $t = 0$ تا $t = 2s$ ابتدا سرعت اولیه و سپس شتاب حرکت را محاسبه می‌کنیم.

$$\Delta x = \frac{v_0 + v_2}{2}\Delta t \Rightarrow 32 - 24 = \frac{v_0 + 0}{2} \times 2 \Rightarrow v_0 = 8\frac{m}{s}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_0}{2 - 0} = \frac{0 - 8}{2} = -4\frac{m}{s^2}$$

برای محاسبهٔ سرعت گذر از مبدأ مکان، به کمک رابطهٔ مستقل از زمان در بازهٔ زمانی (t' و $2s$) داریم:

$$v'^2 - v_2^2 = 2a.\Delta x \Rightarrow v'^2 - 0 = 2(-4)(-32) \Rightarrow v'^2 = 4 \times 64$$

$$\Rightarrow v' = \pm 16\frac{m}{s} \Rightarrow v' = -16\frac{m}{s}$$ قابل قبول

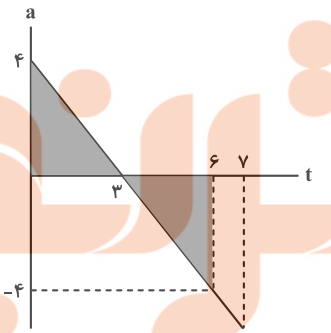
سرعت متوسط در حرکت شتابدار با شتاب ثابت را می‌توان از رابطهٔ $\bar{v} = \frac{v_2 + v'}{2}$ محاسبه کرد. داریم:

$$\bar{v} = \frac{0 + (-16)}{2} = -8\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۴۹- **گزینهٔ «۲»** (حسام نادری)

سطح زیر نمودار شتاب- زمان در یک بازهٔ زمانی، تغییرات سرعت در آن بازه را به دست می‌دهد.



$$0 \text{ تا } 3s \Rightarrow \Delta v = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6 = v_3 - v_0 \xrightarrow{v_0 = 0} v_3 = 6\frac{m}{s}$$

$$3s \text{ تا } 6s \Rightarrow \Delta v = \frac{1}{2} \times 3 \times -4 = -6 = v_6 - v_3$$

$$\xrightarrow{v_3 = 6\frac{m}{s}} v_6 = 0\frac{m}{s}$$

پس از $t = 0$ تا $t = 3s$ حرکت تندشونده و از $t = 3s$ تا $t = 6s$ حرکت کندشونده و در $t = 6s$، متحرک ساکن شده پس بعد از آن، حرکت از حالت سکون داریم که یک حرکت تندشونده است.

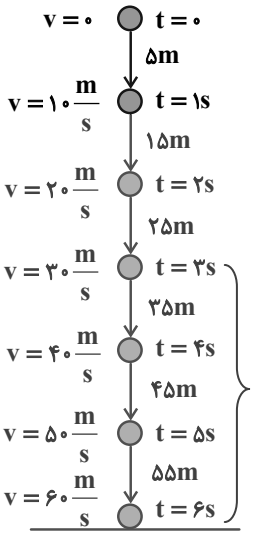
(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۵۰- **گزینهٔ «۱»** (مهدی شریفی)

ابتدا تندی گلوله را ۲ ثانیه قبل از برخورد به زمین محاسبه می‌کنیم:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 20 \times 10^{-3} \times v^2 = 16 \Rightarrow v = 40\frac{m}{s}$$

اگر از راه جابه‌جایی‌های متوالی در زمان‌های مساوی سؤال را حل کنیم:



در سه ثانیهٔ آخر $\Delta x = 35 + 45 + 55 = 135m$

روش دوم: بعد از محاسبهٔ تندی از روی انرژی جنبشی داریم:

۲ ثانیه مانده به آخر حرکت $\Rightarrow v = 40\frac{m}{s}$

کل مدت زمان حرکت $v = gt \Rightarrow 40 = 10(t - 2) \Rightarrow t = 6s$

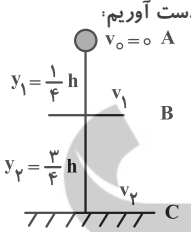
۳ ثانیهٔ پایانی می‌شود از لحظهٔ ۳s تا ۶s:

$$\Delta y_{3s-6s} = \Delta y_{0s-6s} - \Delta y_{0s-3s} = \frac{1}{2} \times 10(36 - 9) = 135m$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۵۱- **گزینهٔ «۳»** (معصومه شریعت‌ناصری)

با توجه به اطلاعات مسئله می‌توانیم سرعت v_1 را به دست آوریم:



$$S_{AB} = \frac{0 + v_1}{2} \Rightarrow 20 = \frac{v_1}{2}$$

$$\Rightarrow v_1 = 40\frac{m}{s}$$

گام دوم: باید رابطهٔ بین $\Delta t_{AB} = t_1$ و Δt کل را به دست آوریم.

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow \frac{1}{4}h = \frac{1}{2}gt_1^2 \\ y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \Rightarrow t = 2t_1$$

حال می‌توان سرعت v_2 را به دست آورد:

$$v_1 = gt_1 \Rightarrow 40 = 10t_1 \Rightarrow t_1 = 4s$$

$$v_2 = g(t) \Rightarrow v_2 = g(2t_1) = 10(2 \times 4) = 80\frac{m}{s}$$

تندی متوسط در کل مسیر به این صورت محاسبه می‌شود:

$$S_{av} = \frac{v_2 + v_0}{2} = \frac{80 + 0}{2} = 40\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۵۲- **گزینهٔ «۱»** (حسام نادری)

هیچ کدام از عبارت‌ها درست نیست. علت نادرستی هر یک را بررسی می‌کنیم:

الف) طبق قانون سوم نیوتون، اندازهٔ نیرویی که اتومبیل به دوچرخه وارد می‌کند با نیروی وارد بر اتومبیل از طرف دوچرخه برابر است و فقط جهت آن‌ها متفاوت است و ربطی به ساکن بودن یا نبودن دوچرخه ندارد.

ب) شرط توازن نیروها، نبودن نیروی خالص است. ممکن است جسم در یک جهت ثابت و بر روی خط راست با شتاب در حال حرکت باشد. (مانند برخی از مسائل فصل ۱)

پ) نیروهای کنش و واکنش همواره هم‌نوع‌اند، مثلاً هر دو الکتریکی‌اند یا مغناطیسی‌اند و یا ...

ت) قانون اول را می‌توان از قانون دوم نتیجه گرفت. اگر در رابطه قانون دوم $(F_{net} = ma)$ شتاب صفر باشد، یعنی یا جسم ساکن است و یا سرعتش ثابت است و برایند نیروهای وارد بر آن صفر است.

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۵)

۵۳- **گزینهٔ «۴»** *(سیده‌ملیحه میرصالحی)*

بیشینهٔ اندازهٔ برایند دو بردار، برابر مجموع اندازهٔ آن‌هاست و کمینهٔ اندازهٔ برایند دو بردار، برابر اختلاف اندازهٔ آن‌هاست.

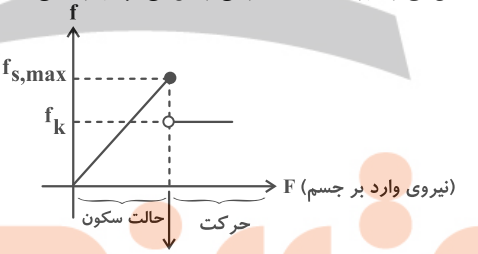
بنابراین اندازهٔ برایند نیروهای $F_1 = 50N$ و $F_2 = 35N$، حداکثر برابر $85N$ و حداقل برابر $15N$ است و می‌توان نوشت:

$$15 \le F_{net} \le 85 \Rightarrow 15 \le ma \le 85 \xrightarrow{m=5kg} 3 \le a \le 17$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحهٔ ۳۳)

۵۴- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا شریفی)*

با توجه به نمودار زیر با افزایش نیرو، اصطکاک زیاد شده به $f_{s,max}$ می‌رسد. سپس کاهش می‌یابد و به اصطکاک جنبشی تبدیل می‌شود و ثابت می‌ماند.

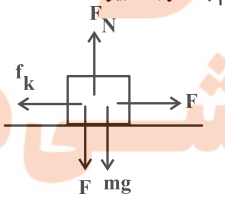


(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۹ تا ۴۳)

۵۵- **گزینهٔ «۲»** *(معصومه شریعت‌ناصری)*

برای حل این سؤال ابتدا بیشینهٔ اصطکاک ایستایی را مشخص می‌کنیم.

- نیروهای وارد بر جسم به صورت زیر است:



$$F_{net} = 0 \Rightarrow F + mg = F_N \Rightarrow F_N = 240 + (16 \times 10) = 400N$$
$$f_{s\,max} = \mu_s F_N = 0/5 \times 400 = 200N$$

- با توجه به این‌که $F > f_{s\,max}$ است پس جسم حرکت می‌کند.

$$f_k = \mu_k F_N = 0/4 \times 400 = 160N$$
$$F - f_k = ma \Rightarrow 240 - 160 = 16a \Rightarrow a = 5\frac{m}{s^2}$$

مقدار شتاب را در رابطه سرعت جای‌گذاری می‌کنیم و سرعت را به دست می‌آوریم:

$$v = at + \cancel{v_0} = 5 \times 3/2 = 16\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۹ تا ۴۳)

۵۶- **گزینهٔ «۴»** *(امیرامحمد میرسعید)*

در حرکت آسانسور، مستقل از جهت حرکت، اگر جهت شتاب رو به بالا باشد، $F_N = m(g+a)$ و اگر جهت شتاب رو به پایین باشد، $F_N = m(g-a)$ است.

$$600 = m(10+2) \Rightarrow m = 50kg$$
$$F_N = m(10-2) = 50 \times 8 = 400N$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)

۵۷- **گزینهٔ «۱»** *(محمدجواد سورچی)*

طبق رابطهٔ زیر، شتاب گرانشی در سطح سیاره را به دست می‌آوریم:

$$g_P = \frac{GM_P}{R_P^2} \quad , \quad g = \frac{GM_e}{R_e^2}$$
$$\Rightarrow \frac{g_P}{g} = \frac{M_P}{M_e} \times (\frac{R_e}{R_P})^2 \xrightarrow[V=\frac{4}{3}\pi R^3]{M=\rho V}$$
$$\frac{g_P}{g} = \frac{\rho_P}{\rho_e} \times (\frac{R_P}{R_e})^3 \times (\frac{R_e}{R_P})^2 \Rightarrow \frac{g_P}{g} = \frac{\rho_P}{\rho_e} \times \frac{R_P}{R_e}$$
$$\xrightarrow[R_P=\frac{1}{2}R_e]{g=9/8\frac{N}{kg},\ \rho_P=3\rho_e} \frac{g_P}{9/8} = \frac{3\rho_e}{\rho_e} \times \frac{\frac{1}{2}R_e}{R_e} = \frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow g_P = \frac{3}{2} \times 9/8\frac{N}{kg}$$

حال جرم جسم را به دست می‌آوریم:

$$W = mg \xrightarrow{W=490N} 490 = m \times 9/8 \Rightarrow m = 50kg$$

نهایت وزن جسم در سطح سیاره را حساب می‌کنیم:

$$F_P = mg_P \Rightarrow F_P = 50 \times \frac{3}{2} \times 9/8 = 735N$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحهٔ ۵۶)

۵۸- **گزینهٔ «۳»** *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

با توجه به شکل زیر، قانون دوم نیوتون را برای هر گلوله می‌نویسیم. داریم:

$$W - f_D = ma \Rightarrow a = \frac{W - f_D}{m}$$
$$\xrightarrow{W=mg} a = \frac{mg - f_D}{m}$$
$$a = g - \frac{f_D}{m}$$

f_D : نیروی مقاومت هوا نامیده می‌شود.

با در نظر گرفتن یکسان بودن مقاومت هوا، هر چه m بیشتر باشد، شتاب حرکت بیشتر است. در نتیجه: $m_2 > m_3 > m_1 \Rightarrow a_2 > a_3 > a_1$

از طرفی طبق رابطهٔ سرعت- جابه‌جایی می‌توانیم بنویسیم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a.\Delta y$$
$$v^2 - 0 = 2ah \Rightarrow v = \sqrt{2ah} \xrightarrow{a_2>a_3>a_1} v_2 > v_3 > v_1$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۵)

۵۹- **گزینهٔ «۴»** *(محمد راست‌پیمان)*

با توجه به این‌که نیروی وزن با نیروی عمودی تکیه‌گاه متوازن است، پس نیروی کشش طناب تامین کننده نیروی مرکزگرا است. $F_{net} = T$

تلاش در مسیر موفقیت

بنابراین:

$$T=\frac{mv^2}{R}$$

$$۱۴۴=\frac{۸\times v^2}{۲}\Rightarrow v^2=۳۶\Rightarrow v=۶\frac{m}{s}$$

از طرفی تندی حرکت جسم برابر است با:

$$v=r(\frac{۲\pi}{T})$$

$$۶=۲(\frac{۲\times ۳}{T})\Rightarrow T=۲s$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحهٔ ۵۳)

۶۰- **گزینهٔ «۲»** *(زهره آقامحمدی)*

شتاب مرکزگرای ماهواره به دور زمین، شتاب گرانشی در محل ماهواره است:

$$\begin{cases}a_c=\frac{v^2}{r}\\ g_h=\frac{GM_e}{r}\end{cases}\xrightarrow{a_c=g_h}\frac{v^2}{r}=\frac{GM_e}{r^2}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM_e}{r}}$$

یعنی تندی ماهواره در فاصلهٔ r از مرکز زمین با جذر r رابطهٔ عکس دارد:

$$\frac{v_۲}{v_۱}=\sqrt{\frac{r_۱}{r_۲}}\xrightarrow{r=h+R_e}\frac{v_۲}{v_۱}=\sqrt{\frac{h_۱+R_e}{h_۲+R_e}}$$

$$\xrightarrow[h_۲=(۱+۰/۴۲)h_۱=۱/۴۲h_۱]{h_۱=R_e}$$

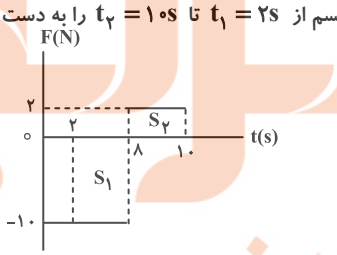
$$\frac{v_۲}{v_۱}=\sqrt{\frac{R_e+R_e}{۱/۴۲R_e+R_e}}=\sqrt{\frac{۲}{۲/۴۲}}=\sqrt{\frac{۱}{۱/۲۱}}$$

$$\Rightarrow\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{۱}{۱/۱}=\frac{۱۰}{۱۱}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۵۱ تا ۵۶)

۶۱- **گزینهٔ «۲»** *(محمدجواد سورچی)*

تغییر تکانهٔ جسم از $t_۱=۲s$ تا $t_۲=۱۰s$ را به دست می‌آوریم:



$$\Delta p=-S_۱+S_۲\quad ;\ t_۱=۲s\ \text{تا}\ t_۲=۱۰s$$

$$=(-)((۸-۲)(۱۰))+((۱۰-۸))\times ۲$$

$$\Rightarrow\Delta p=-۶۰+۴=-۵۶\frac{kg.m}{s}$$

سپس تکانهٔ جسم در لحظهٔ $t_۱=۲s$ را حساب می‌کنیم:

$$p_۱=mv\Rightarrow p_۱=۲\times ۵=۱۰\frac{kg.m}{s}$$

در نهایت تکانهٔ جسم در لحظهٔ $t_۲=۱۰s$ را به دست می‌آوریم:

$$\overrightarrow{\Delta p}=\vec{p}_۲-\vec{p}_۱\xrightarrow[\vec{P}_۱=۱۰(\frac{kg.m}{s})\vec{i}]{\overrightarrow{\Delta P}=-۵۶(\frac{kg.m}{s})\vec{i}}-۵۶\vec{i}=\vec{P}_۲-۱۰\vec{i}$$

$$\Rightarrow\vec{p}_۲=-۴۶(\frac{kg.m}{s})\vec{i}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸)

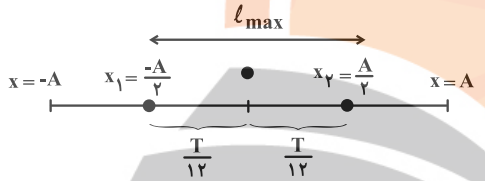
۶۲- **گزینهٔ «۲»** *(سیده‌ملیحه میرصالحی)*

هنگامی که بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد، متحرک از نقطهٔ تعادل نوسان عبور کرده و اندازهٔ شتاب، انرژی پتانسیل و نیرو صفر بوده و پس از این لحظه افزایش می‌یابند تا در دو انتهای مسیر بیشینه شوند، بنابراین گزینهٔ «۲» صحیح است.

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحهٔ ۶۳)

۶۳- **گزینهٔ «۲»** *(محمدجواد سورچی)*

ابتدا دامنهٔ نوسان را با توجه به بیشترین مسافت در مدت زمان $\frac{T}{۶}$ به دست می‌آوریم. می‌دانیم برای این‌که در بازهٔ زمانی $\Delta t<\frac{T}{۲}$ بخواهیم بیشترین مسافت را داشته باشیم باید نقطهٔ تعادل $(x=۰)$ وسط مسیر باشد. بنابراین داریم:



$$\Rightarrow\ell_{max}=\frac{A}{۲}-(-\frac{A}{۲})=A\xrightarrow{\ell_{max}=۱۰cm}A=۱۰cm$$

سپس مسافت طی شده در یک دورهٔ تناوب که برابر با $\ell=۴A$ است را به دست می‌آوریم:

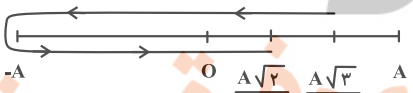
$$\ell=۴A\xrightarrow{A=۱۰cm}۴A=۴۰cm$$

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۳ و ۶۴)

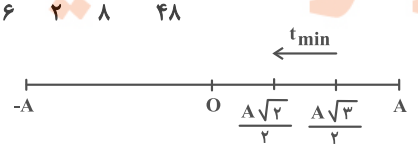
۶۴- **گزینهٔ «۳»** *(امیرامحمد میرسعید)*

در گام اول نسبت بیشترین سرعت متوسط به کمترین سرعت متوسط را می‌نویسیم و چون جابه‌جایی در هر دو حالت برابر است با هم ساده می‌شوند و می‌توان نوشت:

$$\frac{v_{av_{max}}}{v_{av_{min}}}=\frac{\frac{\Delta x}{t_{min}}}{\frac{\Delta x}{t_{max}}}=\frac{t_{max}}{t_{min}}$$



$$t_{max}=\frac{T}{۶}+\frac{T}{۲}+\frac{T}{۸}=\frac{۳۸T}{۴۸}$$



$$t_{min}=\frac{T}{۶}-\frac{T}{۸}=\frac{۲T}{۴۸}=\frac{T}{۲۴}$$

$$\frac{t_{max}}{t_{min}}=\frac{\frac{۳۸T}{۴۸}}{\frac{T}{۲۴}}=\frac{۳۸}{۲}=۱۹$$

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۳ و ۶۴)

تلاشگران برتر
تلاش پرشور موفقیت

۶۵- **گزینهٔ «۲»** (محمود منصوری)

بسامد زاویه‌ای نوسانگر برابر است با: $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{0/4}\Rightarrow\omega=5\pi\frac{rad}{s}$

حال با استفاده از معادلهٔ مکان- زمان نوسانگر، اختلاف زمانی این دو مکان را به دست می‌آوریم: $x=A\cos(\omega t)\Rightarrow x=A\cos(5\pi t)$

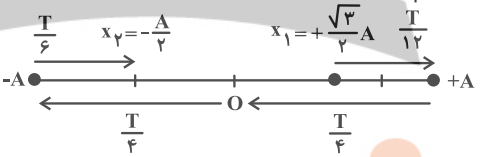
$$\xrightarrow[\text{حرکت کندشونده}]{x_1=\frac{\sqrt{3}}{2}A}\frac{\sqrt{3}}{2}A=A\cos(5\pi t_1)$$

$$\Rightarrow\frac{11\pi}{6}=5\pi t_1\Rightarrow t_1=\frac{11}{30}s\xrightarrow[v>0]{x_2=-\frac{A}{2}}-\frac{A}{2}=A\cos(5\pi t_2)$$

$$\Rightarrow\frac{10\pi}{3}=5\pi t_2\Rightarrow t_2=\frac{10}{15}s$$

$$\Delta t=t_2-t_1=\frac{10}{15}-\frac{11}{30}=\frac{20-11}{30}=\frac{9}{30}=0/3s$$

راه دوم: هنگامی حرکت نوسانگر کندشونده است که نوسانگر به سمت نقطهٔ بازگشت حرکت کند و با توجه به آن‌که $x_1=+\frac{\sqrt{3}}{2}A$ است و حرکتش کندشونده، آن را روی نمودار مشخص می‌کنیم. حال در قسمت منفی مکان، زمانی سرعت مثبت است که نوسانگر به سمت مرکز نوسان حرکت کند و با توجه به آن‌که $x_2=-\frac{A}{2}$ است و سرعتش مثبت، آن را روی نمودار مشخص می‌کنیم:



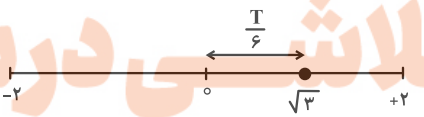
$$\Delta t=\frac{T}{12}+\frac{T}{4}+\frac{T}{4}+\frac{T}{6}=\frac{9T}{12}\xrightarrow{T=0/4s}$$

$$\Delta t=\frac{9\times0/4}{12}=0/3s$$

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۳ تا ۶۶)

۶۶- **گزینهٔ «۳»** (عبدالرضا امینی‌نسب)

معادلهٔ حرکت نوسانی هماهنگ ساده به صورت $x=A\cos(\omega t)$ می‌باشد. به کمک عدد روی محور افقی، دورهٔ تناوب و سپس ω را محاسبه می‌کنیم، داریم:



$$t=1/1s\Rightarrow\frac{3T}{4}+\frac{T}{6}=\frac{11}{10}$$

$$\frac{11T}{12}=\frac{11}{10}\Rightarrow T=1/2s\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{1/2}=\frac{5\pi}{3}\frac{rad}{s}$$

$$x=2\cos(\frac{5\pi}{3}t)\xrightarrow{t=10s}x=2\cos(\frac{50\pi}{3})$$

$$=2\cos(16\pi+\frac{2\pi}{3})\Rightarrow x=2\cos(\frac{2\pi}{3})=2\times(-\frac{1}{2})=-1cm$$

دقت کنید دامنهٔ نوسان را برحسب cm جای‌گذاری کرده‌ایم. بنابراین پاسخ نهایی برحسب cm است.

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۳ تا ۶۵)

۶۷- **گزینهٔ «۲»** (معصومه شریعت‌ناصری)

می‌دانیم که انرژی جنبشی نوسانگر هنگام گذر از حالت تعادل بیشینه و برابر انرژی مکانیکی آن است. بنابراین با توجه به داده‌های مسئله می‌توان دامنهٔ نوسان را به دست آورد: $E=K_m=18J$

با توجه به این‌که در صورت سؤال به ما دوره داده شده است، بنابراین می‌توان بسامد زاویه‌ای را به دست آورد.

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{0/1}=20\pi\frac{rad}{s}\Rightarrow E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2$$

$$\xrightarrow{m=100g=0/1kg}18=\frac{1}{2}\times0/1\times A^2\times400\times\pi^2$$

$$\Rightarrow18=\frac{1}{2}\times0/1\times A^2\times400\times10\Rightarrow A^2=0/09\Rightarrow A=0/3m$$

$$\Rightarrow x=0/3\cos20\pi t$$

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۳ تا ۶۵)

۶۸- **گزینهٔ «۴»** (عبدالرضا امینی‌نسب)

می‌دانیم اختلاف حداکثر و حداقل طول فنر، همان طول پاره‌خط نوسان است، بنابراین داریم: $L=30-20=10cm\Rightarrow A=\frac{L}{2}=5cm=0/05m$

از طرفی انرژی مکانیکی نوسانگر از رابطهٔ $E=\frac{1}{2}kA^2$ به دست می‌آید که k ثابت فنر می‌باشد.

$$E=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}\times200\times(\frac{5}{100})^2=\frac{1}{2}\times200\times25\times10^{-4}$$

$$=25\times10^{-2}J=0/25J$$

طبق قانون پایستگی انرژی $E=K+U$، انرژی جنبشی را محاسبه می‌کنیم:

$$E=K+U\Rightarrow0/25=K+0/05\Rightarrow K=0/20J$$

در نهایت به کمک رابطهٔ $K=\frac{1}{2}mv^2$، تندی وزنه را به دست می‌آوریم. داریم:

$$K=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow0/2=\frac{1}{2}\times0/2\times v^2\Rightarrow v^2=2\Rightarrow v=\sqrt{2}\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۵ تا ۶۷)

۶۹- **گزینهٔ «۴»** (سیده‌ملیحه میرصالحی)

با توجه به نمودار می‌توان نوشت: $K_{max}=300mJ=0/3J$

در ادامه برای محاسبهٔ دامنهٔ نوسانگر به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$F_{max}=kA\xrightarrow{F_{max}=12N}kA=12N$$

$$E=K_{max}=\frac{1}{2}kA^2\xrightarrow[K_{max}=0/3J]{kA=12N}0/3=\frac{1}{2}\times12\times A$$

$$\Rightarrow A=0/05m\Rightarrow A=5cm$$

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحهٔ ۶۶)

۷۰- **گزینهٔ «۴»** (عبدالرضا امینی‌نسب)

برای جلو افتادن ساعت باید عملی انجام دهیم که تعداد نوسان‌های آن در یک زمان مشخص بیشتر شود، بنابراین باید دورهٔ حرکت آن کوچک‌تر شود (به عبارت دیگر باید بسامد نوسانات افزایش یابد.) در این صورت طبق رابطهٔ $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ باید L کوچک‌تر یا g بزرگ‌تر بشود که با کاهش دمای محیط، طول نخ آونگ کاهش می‌یابد.

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۷ و ۶۸)

تلاشی درمسیر موفقیت

شیمی

۷۱- **گزینهٔ «۱»** *(سهراب صادقی‌زاده)*

$$2Al_2O_3 + 3C \rightarrow 4Al + 3CO_2$$

تعداد مول الکترون مبادله شده $= 12 mol\ e^-$

$$?mol\ CO_2 = 1/806\times10^{24} e^- \times \frac{1 mol\ e^-}{6/02\times10^{23}} \times \frac{3 mol\ CO_2}{12 mol\ e^-}$$

$$= 0/75 mol\ CO_2$$

$$CO_2 + CaO \rightarrow CaCO_3$$

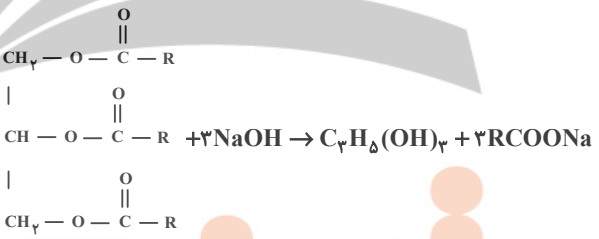
$$?\ g\ CaCO_3 = 0/75 mol\ CO_2 \times \frac{1 mol\ CaCO_3}{1 mol\ CO_2}$$

$$\times \frac{100 g\ CaCO_3}{1 mol\ CaCO_3} = 75 g\ CaCO_3$$

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحهٔ ۶۱)

۷۲- **گزینهٔ «۳»** *(علی امینی)*

واکنش استرهای سه عاملی با سدیم هیدروکسید به شکل زیر است:



$$C_{51}H_{92}O_6 + 3NaOH \rightarrow C_3H_5(OH)_3 + \underbrace{3C_{15}H_{29}COONa}_{=C_{16}H_{29}O_2Na}$$

$$?kg\ \text{محلول}\ NaOH = 10^3 g\ \text{استر} \times \frac{1 mol\ \text{استر}}{800 g\ \text{استر}}$$

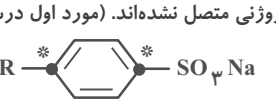
$$\times \frac{3 mol\ NaOH}{1 mol\ \text{استر}} \times \frac{40 g\ NaOH}{1 mol\ NaOH} \times \frac{100 g\ \text{محلول}}{30 g\ NaOH}$$

$$\times \frac{1 kg}{10^3 g} = 0/5 kg\ \text{محلول}\ NaOH$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۵ و ۶)

۷۳- **گزینهٔ «۲»** *(مرتضی زارعی)*

در یک پاک‌کننده غیرصابونی با فرمول زیر می‌توان ۲ اتم کربن مشخص کرد که به هیچ اتم هیدروژنی متصل نشده‌اند. (مورد اول درست)



- یک پاک‌کننده غیرصابونی می‌تواند در زنجیر هیدروکربنی خود دارای پیوند $C=C$ باشد. پس واژه حداکثر اشتباه بوده و باید حداقل ذکر شود. (مورد دوم نادرست)
- پاک‌کننده غیرصابونی در آب سخت واکنش نمی‌دهد (مورد سوم نادرست)
- بخش ناقطبی پاک‌کننده غیرصابونی که شامل زنجیر R و حلقه هیدروکربنی است ۴ اتم هیدروژن بیشتر از زنجیر آلکیل دارد. (مورد چهارم نادرست)

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۷۴- **گزینهٔ «۳»** *(میلاد شیخ‌الاسلامی)*

بررسی عبارت‌ها:

آ) نادرست. سوانت آرنیوس اولین نظریه اسید و بازها را ارائه نداد بلکه اولین نظریه‌ای که مبنای علمی داشت را ارائه کرد.

ب) نادرست. در منابع علمی بجای $H_3O^+(aq)$ از $H^+(aq)$ استفاده می‌شود.

پ) نادرست. علاوه بر فلزات، مغز مداد که از جنس گرافیت (دگرشکل کربن) بوده و یک نافلز است، رسانای الکترونی می‌باشد.

ت) درست. زیرا مولکول‌های مادهٔ الکترولیت به‌طور کامل در آب به یون تبدیل شده‌اند و هیچ مولکول یونیده نشده‌ای مشاهده نمی‌شود.

ث) نادرست. اسیدها و بازها براساس میزان یونشی که در آب دارند به دو دستهٔ ضعیف و قوی تقسیم می‌شوند.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۴ تا ۱۹)

۷۵- **گزینهٔ «۲»** *(احسان ایروانی)*

با توجه به این‌که هر دو محلول در دمای $25^\circ C$ می‌باشند داریم:

محلول اول:

$$pH = -\log([H_3O^+]_1)$$

$$\Rightarrow [H_3O^+]_1 = 10^{-pH} \Rightarrow [H_3O^+]_1 = 10^{-4/2}$$

$$[H_3O^+][OH^-] = 10^{-14}$$

محلول دوم:

$$\Rightarrow [H_3O^+]_2 = 10^{-pH} \Rightarrow [H_3O^+]_2 = 10^{-8/5}$$

$$\Rightarrow [OH^-]_2 = \frac{10^{-14}}{[H_3O^+]_2} = \frac{10^{-14}}{10^{-8/5}} = 10^{-5/5}$$

$$\Rightarrow \frac{[H_3O^+]_1}{[OH^-]_2} = \frac{10^{-4/2}}{10^{-5/5}} = 10^{1/3} = 10^2 \times 10^{-0/7}$$

$$100 \times \frac{1}{5} = 20$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۸)

۷۶- **گزینهٔ «۲»** *(علی امینی)*

$$\text{مولاریته} = \frac{1/2 g\ CH_3COOH}{1 L\ \text{محلول}} \times \frac{1 mol\ CH_3COOH}{60 g\ CH_3COOH}$$

$$= 2\times10^{-2} \frac{mol}{L}$$

مولاریته اولیه اسید:

$$\xrightarrow{in\ 25^\circ C} [H^+][OH^-] = 10^{-14}$$

$$\frac{[H^+]}{[OH^-]} = 3/6\times10^7 \Rightarrow [H^+] \times \frac{[H^+]}{3/6\times10^7} = 10^{-14}$$

$$\Rightarrow [H^+]^2 = 36\times10^{-8} \Rightarrow [H^+] = 6\times10^{-4} \frac{mol}{L}$$

درصد یونش $\alpha\% = \frac{[H^+]}{[CH_3COOH]_0} \times 100 = \frac{6\times10^{-4}}{2\times10^{-2}} \times 100 = 3\%$

$K_a = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha} \xrightarrow{\text{تقریب}} K_a \simeq M\alpha^2$

$= 2\times10^{-2} \times (3\times10^{-2})^2 = 1/8\times10^{-5}$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۹، ۲۳، ۲۶ و ۲۷)

۷۷- **گزینهٔ «۲»** *(رضا سلیمانی)*

عبارت اول، دوم درست هستند.

بررسی همهٔ عبارت‌ها:

عبارت اول: درجهٔ یونش HX نصف درجهٔ یونش HY است.

$HX: [H^+] = M\alpha \Rightarrow [H^+] = \frac{10}{80}\alpha$

$HY: [H^+] = M\alpha \Rightarrow [H^+] = \frac{10}{160}\alpha$

عبارت دوم: چون مقدار یون هیدرونیم در هر دو محلول برابر است غلظت آنیون‌های دو محلول نیز یکسان است.

عبارت سوم:

$HX \rightleftharpoons H^+ + X^-$

$\frac{1}{8} - x \quad x \quad x$

$HY \rightleftharpoons H^+ + Y^-$

$\frac{1}{16} - x \quad x \quad x$

با توجه به معادلهٔ تفکیک دو اسید مجموع شمار گونه‌های متفاوت است.

عبارت چهارم: چون HY اسید قوی‌تری بوده میزان K_a آن از HX بیشتر است.

عبارت پنجم: چون غلظت یون هیدرونیم برابر است، در نخستین لحظه، سرعت واکنش نوار منیزیم با محلول هر دو ظرف یکسان است. ولی در نهایت گاز هیدروژن یکسانی آزاد نمی‌شود چون مقدار مول اولیه اسیدها با یکدیگر برابر نیست.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۴، ۱۵، ۱۹، ۲۲، ۲۴ و ۲۵)

۷۸- **گزینهٔ «۲»** *(مینا شرافتی‌پور)*

بررسی همهٔ عبارت‌ها:

گزینهٔ (۱):

$3/78\,g\,HNO_3 \times \frac{1\,mol\,HNO_3}{63\,g\,HNO_3} = 0/06\,mol\,HNO_3$

$[HNO_3] = [H^+] = \frac{6\times10^{-2}\,mol}{5\,L} = 12\times10^{-3}\,mol.L^{-1}$

$[H^+][OH^-] = 10^{-14} \Rightarrow [OH^-] = \frac{10^{-14}}{12\times10^{-3}}$

$= 8/33\times10^{-13}$

گزینهٔ (۲): شیر ترش شده، مرکبات و آب گازدار هر سه اسیدی بوده و سبب قرمز شدن رنگ کاغذ pH می‌شوند.

گزینهٔ (۳):

$\frac{[OH^-]}{[H^+]} = 4\times10^{-6}$

$[H^+][OH^-] = 10^{-14}$

$\Rightarrow [H^+]^2 \times 4\times10^{-6} = 10^{-14} \Rightarrow [H^+] = 5\times10^{-5}$

$pH = -\log[H^+] = -\log 5\times10^{-5} = 5 - 0/7 = 4/3$

گزینهٔ (۴): مطابق متن صفحهٔ ۲۶ کتاب درسی درست است.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۸)

۷۹- **گزینهٔ «۳»** *(محمدرضا زهره‌وند)*

تنها مورد (ت) نادرست است.

بررسی مورد (الف): در دما و غلظت ثابت هر چه باز قوی‌تر باشد درجه یونش آن نیز بیشتر است و در نتیجه تعداد بیشتری یون در محلول وجود دارد و رسانایی الکتریکی محلول بیشتر است.

بررسی درستی مورد (ب): هرچه محلول یک باز خصلت بازی بیشتری داشته باشد، با افزودن مقدار معینی از یک اسید یا باز به آن pH تغییر کمتری می‌کند، زیرا میزان یون‌های افزوده شده $[OH^-]$ در مقایسه با یون‌های اولیه $[OH^-]$ ناچیز است.

بررسی درستی مورد (پ): برای مثال در واکنش خنثی شدن HCl و NaOH، یون‌های Na^+ و Cl^- تشکیل نمک محلول NaCl و در خنثی شدن $Ba(OH)_2$ و H_2SO_4 تشکیل نمک نامحلول $BaSO_4$ را می‌دهند.

بررسی نادرستی مورد (ت): در مخلوط نهایی باید غلظت H_3O^+ و OH^- برابر شود، نه صفر.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۹ و ۳۰)

۸۰- **گزینهٔ «۲»** *(حسین ناصری‌ثانی)*

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: از آنجا که پتاسیم هیدروکسید باز قوی است و به‌طور کامل تفکیک می‌شود، بنابراین با توجه به معادلهٔ تفکیک آن غلظت یون هیدروکسید با غلظت پتاسیم هیدروکسید برابر خواهد بود:

$KOH(aq) \rightarrow K^+(aq) + OH^-(aq)$

$[OH^-] = [KOH] = \frac{0/02\,mol}{0/1\,L} = 0/2\,mol.L^{-1}$

گزینهٔ «۲»:

$[H^+] = \frac{10^{-14}}{[OH^-]} = \frac{10^{-14}}{0/2} = 5\times10^{-14}\,mol.L^{-1}$

$\Rightarrow pH = -\log[H^+] = -\log 5\times10^{-14} = 13/3$

گزینهٔ «۳»: با توجه به واکنش:

$KOH(aq) + HCl(aq) \rightarrow KCl(aq) + H_2O(l)$

$?\,mL\,HCl = 0/1\,L\,KOH \times \frac{0/2\,mol\,KOH}{1\,L\,KOH} \times \frac{1\,mol\,HCl}{1\,mol\,KOH}$

$\times \frac{1\,L\,HCl}{0/5\,mol\,HCl} \times \frac{1000\,mL\,HCl}{1\,L\,HCl} = 40\,mL\,HCl$

گزینهٔ «۴»:

$$?\,mol\,KOH = ۲/۸g\,KOH \times \frac{۱mol\,KOH}{۵۶g\,KOH} = ۰/۰۵molKOH$$ (اضافه شده)

$$\text{مول } KOH \text{ در محلول جدید} = ۰/۰۲mol + ۰/۰۵mol = ۰/۰۷mol$$

$$\text{محلول جدید } [OH^-] = [KOH] = \frac{۰/۰۷mol}{۰/۱L} = ۰/۷mol.L^{-۱}$$

$$\frac{[OH^-]_۲}{[OH^-]_۱} = \frac{۰/۷}{۰/۲} = ۳/۵$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۸ تا ۳۱)

۸۱- **گزینهٔ «۴»** *(رضا سلیمانی)*

در اثر انحلال $N_۲O_۵$ در آب، واکنش زیر:

$$N_۲O_۵(g) + H_۲O(l) \rightarrow ۲HNO_۳(aq)$$

نیتریک اسید تولید می‌شود که این محلول مطابق واکنش:

$$HNO_۳(aq) + KOH(aq) \rightarrow KNO_۳(aq) + H_۲O(l)$$

با محلول پتاسیم هیدروکسید (پتاس سوزآور) خنثی می‌شود.

ابتدا مقدار مول $N_۲O_۵$ تولید و حل شده در آب را به کمک حجم و pH پتاس سوزآور محاسبه می‌کنیم:

$$KOH: pH = ۱۲/۸$$

$$[KOH] = [OH^-] = ۱۰^{-pOH} = ۱۰^{-(۱۴-۱۲/۸)} = ۱۰^{-۱/۲} = ۲ \times ۳ \times ۱۰^{-۲} = ۶ \times ۱۰^{-۲}\,mol.L^{-۱}$$

$$?\,mol\,N_۲O_۵ = ۴L\,KOH(aq) \times \frac{۶ \times ۱۰^{-۲}\,mol\,KOH}{۱L\,KOH(aq)} \times \frac{۱mol\,HNO_۳}{۱mol\,KOH} \times \frac{۱mol\,N_۲O_۵}{۲mol\,HNO_۳} = ۰/۱۲mol\,N_۲O_۵$$

سپس به کمک معادلهٔ واکنش تولید $N_۲O_۵$ و $O_۲$، مقدار مول $O_۲$ مصرف شده در واکنش را به‌دست می‌آوریم:

$$۴NO_۲(g) + O_۲(g) \rightarrow ۲N_۲O_۵(g)$$

$$?\,mol\,O_۲ = ۰/۱۲mol\,N_۲O_۵ \times \frac{۱mol\,O_۲}{۲mol\,N_۲O_۵} = ۰/۰۶mol\,O_۲$$

در انتها، با توجه به واکنش کلی برقکافت آب، جرمی از آب که برقکافت شده را محاسبه می‌کنیم:

$$۲H_۲O(l) \rightarrow ۲H_۲(g) + O_۲(g)$$

$$?\,g\,H_۲O = ۰/۰۶mol\,O_۲ \times \frac{۲mol\,H_۲O}{۱mol\,O_۲} \times \frac{۱۸g\,H_۲O}{۱mol\,H_۲O} = ۲/۱۶g\,H_۲O$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۶ و ۳۰ تا ۳۲)

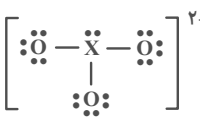
۸۲- **گزینهٔ «۳»** *(محمدرضا جمشیری)*

میان مولکول‌های اسید چرب نیروی وان‌درواالسی و هیدروژنی وجود دارد.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲، ۴ تا ۷)

۸۳- **گزینهٔ «۱»** *(محمدجواد صادقی)*

X از گروه ۱۶ جدول دوره‌ای خواهد بود.



$$\Rightarrow \frac{\text{الکترون پیوندی}}{\text{جفت‌الکترون ناپیوندی}} = \frac{۶}{۱۰} = \frac{۳}{۵}$$

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۴۳ و ۵۳)

۸۴- **گزینهٔ «۱»** *(جواد سوری‌لکی)*

گزینهٔ «۱»: محصول نهایی روی هیدروکسید است. (نادرست)

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۲»: آهن در این واکنش نقشی ندارد. (درست)

گزینهٔ «۳»: در محلول الکترولیت این شکل یون هیدروکسید تولید می‌شود و خاصیت بازی دارد و رنگ کاغذ پی اچ آبی رنگ می‌شود. (درست)

گزینهٔ «۴»: در محیط اسیدی قدرت اکسندگی اکسیژن بیشتر است و خوردگی به میزان بیشتری رخ می‌دهد. (درست)

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۵۷ و ۵۹)

۸۵- **گزینهٔ «۱»** *(محسن بابامیری)*

بررسی موارد:

مورد اول: نیم سلول تأمین‌کننده الکترون (آند)، جایی است که اتم‌های فلزی، الکترون از دست داده و به شکل کاتیون وارد الکترولیت می‌شوند.

مورد دوم: یون‌ها در کاتد، با گرفتن الکترون کاهش یافته و روی تیغه قرار می‌گیرند و باعث افزایش جرم تیغه می‌شوند.

مورد سوم: نادرست؛ در سلول‌های الکتروشیمیایی، کاتیون‌ها و الکترون‌ها به سمت کاتد و آنیون‌ها به سمت آند حرکت می‌کنند.

مورد چهارم: نادرست؛ به‌طور مثال اگر یک مول $Zn(NO_۳)_۲$ وارد محلول شود و یک مول $Cu(NO_۳)_۲$ از محلول خارج شود، جرم محلول الکترولیت ۱ گرم زیاد می‌شود.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۴۶)

۸۶- **گزینهٔ «۳»** *(محمد خائزنیا)*

موارد دوم و سوم نادرست هستند.

بررسی تمام موارد:

مورد اول: نیم‌واکنش اکسایش در آند انجام می‌شود و آند متصل به قطب مثبت باتری می‌باشد.

مورد دوم: در یک سلول الکترولیتی، هیچکدام از نیم‌واکنش‌های آندی و کاتدی به‌طور طبیعی انجام نمی‌شوند.

مورد سوم: نقره کلرید در آب نامحلول است و نمی‌تواند به عنوان الکترولیت برای این سلول انتخاب شود.

مورد چهارم: چون نیم‌واکنش‌های اکسایش و کاهش در این سلول، عکس یکدیگر هستند لذا هر مقدار مول (کاتیون نقره) که از آند این سلول آزاد می‌شود، در کاتد این سلول کاهش می‌یابد. بنابراین غلظت کاتیون‌های نقره در محلول الکترولیت این سلول به تقریب ثابت می‌ماند.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۶۰ و ۶۲)

۸۷- **گزینهٔ «۲»** *(پویا رستگاری)*

با توجه به صورت سوال متوجه میشویم که E° فلز منیزیم از E° روی کوچک‌تر بنابراین قدرت کاهندگی بیشتری نسبت به روی دارد.

گزینهٔ (۱): قدرت اکسندگی Zn^{2+} از قدرت اکسندگی Mg^{2+} بیشتر است.

گزینهٔ (۲): واکنش انجام شده در این سلول به‌صورت زیر است:

$$Mg(s)+Zn^{2+}(aq)\rightarrow Mg^{2+}(aq)+Zn(s)$$

به‌ازای هر ۲ مول الکترون مبادله شده ۲۴ گرم (۱ مول) از جرم تیغه منیزیمی کاسته و ۶۵ گرم (۱ مول) به جرم تیغهٔ روی افزوده می‌شود بنابراین تفاوت جرم تیغه‌ها برابر ۸۹ گرمی شود:

$$?:\text{تفاوت جرم تیغه‌ها}: 2/408\times10^{24}\times\frac{1\,mole}{6/02\times10^{23}}\times\frac{89g}{2\,mole}=178g$$

گزینهٔ (۳): الکترون‌ها در سلول‌های گالوانی از سمت آند به سمت کاتد حرکت می‌کنند که در اینجا منیزیم نقش آند و روی نقش کاتد را ایفا می‌کند.

گزینهٔ (۴): چون قدرت کاهندگی منیزیم نسبت به روی بیشتر است بنابراین در مواجههٔ Zn^{2+} با فلز منیزیم، منیزیم با آن واکنش داده و Zn^{2+} را می‌کاهد، پس نمی‌توانیم محلول روی کلرید را در ظرفی از جنس منیزیم نگهداری کنیم.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحهٔ ۴۷)

۸۸- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین طیبی)*

مورد اول) برقکافت جزو قلمروی تولید و بهبود خواص مواد از دانش الکتروشیمی است.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۳۷ تا ۳۹)

۸۹- **گزینهٔ «۱»** *(عامر بزرگر)*

A: اتم روی

B: اتم‌های اکسیژن در مولکول O_2

C: یون Zn^{2+}

D: یون O^{2-}

مورد (پ): C همان Zn^{2+} است و یون پایداری است که به آرایش هیچ گاز نجیبی نرسیده است.

مورد (ت):

$$_{30}Zn^{2+}: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10}\ \text{یا}\ C$$

$$_{29}Cu: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^1\ \text{یا نهمین عنصر واسطهٔ دستهٔ}\ d$$

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۳۷ تا ۵۰)

۹۰- **گزینهٔ «۳»** *(حسن رحمتی‌کوکنده)*

مطابق شکل Zn آند و Ag کاتد است زیرا الکترون‌ها از طریق سیم از آند به کاتد جابه‌جا می‌شوند.

$$Zn(s)+2Ag^{+}(aq)\rightarrow Zn^{2+}(aq)+2Ag(s)$$

با توجه به واکنش، به ازای مبادله ۲ مول الکترون مقدار ۶۵ گرم از جرم تیغه Zn کاسته شده و مقدار $2\times108=216$ گرم به جرم تیغه Ag افزوده می‌شود.

تغییر جرم دو تیغه $216-65=151$ گرم می‌باشد.

$$20/32-(10/8+6/5)=3/02g$$

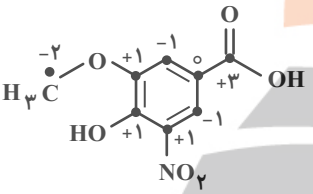
$$?\,mole=3/02g\times\frac{2\,mole}{151g}=0/04\,mole^{-}$$

در سلول‌های گالوانی جهت انتقال کاتیون‌ها از طریق دیواره متخلخل از ظرف آندی به سمت ظرف کاتدی می‌باشد.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحهٔ ۴۵)

۹۱- **گزینهٔ «۲»** *(دانیال علی‌دوست)*

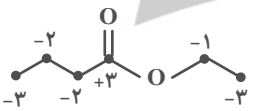
تنوع عدد اکسایش کربن: ۲-، ۱-، ۱+، ۳+، صفر



قسمت اول سوال: تنوع عدد اکسایش کربن: ۵ (رد گزینه‌های ۱ و ۳)

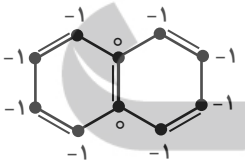
اتیل بوتانوات:

تنوع عدد اکسایش کربن: ۳+، ۱-، ۲-، ۳-



تنوع عدد اکسایش کربن: ۱-، صفر

نفتالن:



تنوع عدد اکسایش کربن در اتیل بوتانوات، یکی از کمتر از همین تنوع مطرح شده در سوال می‌باشد.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۵۲ و ۵۳)

۹۲- **گزینهٔ «۱»** *(عامر بزرگر)*

تمام موارد درست هستند.

مورد (آ): درست؛ واکنش کلی فرآیند هال به‌صورت:

$$2Al_2O_3(s)+3C(s)\rightarrow 4Al(l)+3CO_2(g)$$

می‌باشد. گاز تولید شده همان CO_2 است که با ورود به آب مطابق واکنش زیر، کربنیک اسید ایجاد می‌کند:

$$CO_2+H_2O\rightleftharpoons H_2CO_3$$

مورد (ب): قاشق فلزی نقش کاتد (قطب منفی) و نقره نقش آند (قطب مثبت) را خواهد داشت.

مورد (پ): با توجه به شکل صفحهٔ ۵۶ کتاب درسی درست است.

مورد (ت): واکنش کلی برقکافت آب به صورت:

$$2H_2O(l)\rightarrow 2H_2(g)+O_2(g)$$ می‌باشد.

گاز تولید شده در کاتد (گاز H_2) دو برابر گاز تولید شده در آند (گاز O_2) حجم دارد زیرا ضریب H_2 دو برابر ضریب O_2 می‌باشد.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۵۴ تا ۵۶ و ۶۰ تا ۶۳)

۹۳- **گزینهٔ «۴»** *(حامد صابری)*

الف) همهٔ انواع واکنش‌های اکسایش و کاهش انرژی آزاد نمی‌کنند، مانند برقکافت که با صرف انرژی یک واکنش اکسایش وکاهش انجام می‌دهد.

ب) مس نخستین عنصری است که لایهٔ سوم آن کاملا پر است و قدرت کاهندگی کمتری نسبت به آهن دارد.

پ) هنگامی غلظت H^+ می‌تواند با Al^{3+} برابر شود که H^+ مصرف و Al^{3+} تولید شود و چون غلظت H^+ کاهش می‌یابد، سرعت واکنش کم می‌شود.

$$2Al + 6H^+ \rightarrow 2Al^{3+} + 3H_2$$

H^+ مصرف و Al^{3+} تولید می‌شود و چون غلظت H^+ کاهش می‌یابد سرعت واکنش کم می‌شود.

ت) چون ضریب Zn^{2+} و Cu^{2+} برابر است، پس مجموع غلظت آن‌ها در تمام طول واکنش برابر است.

$$Zn(s) + Cu^{2+}(aq) \rightarrow Zn^{2+}(aq) + Cu(s)$$

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۴۱، ۴۲ و ۴۷)

۹۴- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین طیبی)*

گزینهٔ (۱): درست- به کاتد این سلول یک نوع گاز (O_2) وارد می‌شود. اگر بخشی از O_2 وارد واکنش نشود، به همراه H_2O تولیدی از کاتد خارج می‌شود. در نتیجه ممکن است دو نوع گاز از کاتد خارج شود.

گزینهٔ (۲): درست- الکترون‌ها از مدار بیرونی و پروتون‌ها از طریق غشای مبادله‌کنندهٔ پروتون به سمت کاتد می‌روند

گزینهٔ (۳): نادرست- اکسنده گاز اکسیژن (O_2)، کاهنده گاز H_2 می‌باشد.

$$\ddot{O} = \ddot{O} \qquad H - H$$

شمار جفت الکترون‌های پیوندی در هر مولکول اکسنده، ۲ برابر شمار این جفت الکترون‌ها در هر مولکول کاهنده است.

گزینهٔ (۴):

$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O \sim 4e^-$: سلول سوختی هیدروژن- اکسیژن

$\Rightarrow 1H_2O \sim 2e^-$

$CH_4 + 2O_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O \sim 8e^-$: سلول سوختی متان ـ اکسیژن

$\Rightarrow 1H_2O \sim 4e^-$

الکترون‌های عبوری از مدار بیرونی به ازای تولید هر مول H_2O، ۲ برابر شده است.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۵۰ تا ۵۳)

۹۵- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین طیبی)*

گزینهٔ (۱): درست- قدرت کاهندگی Sn از Cr کمتر است در نتیجه واکنش رخ نمی‌دهد پس می‌توان محلولی از کروم (III) کلرید را در ظرفی از جنس Sn نگهداری کرد.

$Sn + CrCl_3 \rightarrow$ انجام‌پذیر نیست

گزینهٔ (۲): درست- هرچه E° یک عنصر بیشتر باشد قدرت اکسندگی کاتیون آن نیز بیشتر است

گزینهٔ (۳): نادرست- بین این دو عنصر عدد اتمی Mn کمتر از Cu می‌باشد و Mn آند سلول را می‌سازد.

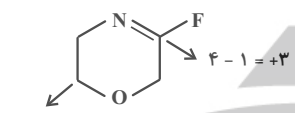
گزینهٔ (۴): درست- در سلول گالوانی طلا و کروم، نیم‌سلول آندی مربوط به Cr می‌باشد در نتیجه ابتدا $[Cr^{3+}]$ در آند افزایش یافته پس از مدتی از طریق دیوارهٔ متخلخل کاتیون‌ها به سمت کاتد می‌روند در نتیجه با گذشت زمان $[Cr^{3+}]$ افزایش می‌یابد.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۴۹)

۹۶- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین طیبی)*

موارد اول و سوم و چهارم به درستی بیان شده‌اند:

مورد اول: درست



$3 - (-1) = 4$

مورد دوم: نادرست

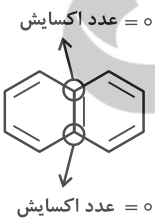
$NH_4NO_3 : NH_4^+ \quad NO_3^-$

$x + 4(+1) = +1 \qquad y + 3(-2) = -1$

$\Rightarrow x = -3 \qquad \Rightarrow y = +5$

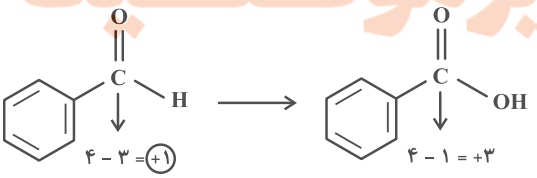
میانگین عدد اکسایش اتم‌های نیتروژن در آمونیوم نیترات برابر با ۱+ است ولی در آمونیوم نیترات اتم نیتروژنی با عدد اکسایش ۱+ وجود ندارد.

مورد سوم: درست



$\frac{2}{10} \times 100 = \%20$ = درصد اتم‌های کربن که عدد اکسایش صفر دارند

مورد چهارم: درست



(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۵۲ و ۵۳)

۹۷- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا جمشیری)*

سلول الکترولیتی $\begin{cases} \text{قطب منفی} \rightarrow Cu \\ \text{قطب مثبت} \rightarrow Pt \end{cases} \Rightarrow E^\circ_{\text{سلول}} = E^\circ_{\text{کاتد}} - E^\circ_{\text{آند}}$

$= 0/34 - 1/20 = -0/86$

تلاش درس موفقیت

سلول گالوانی $\begin{cases}\text{آند}\rightarrow Zn\\ \text{کاتد}\rightarrow Al\end{cases} \Rightarrow E^\circ_{\text{سلول}} = E^\circ_{\text{کاتد}} - E^\circ_{\text{آند}}$

$= -۱/۶۶ - (-۰/۷۶) = -۰/۹ \Rightarrow$ سلول گالوانی نیست

سلول الکترولیتی $\begin{cases}\text{قطب منفی}\rightarrow Zn\\ \text{قطب مثبت}\rightarrow Al\end{cases} \Rightarrow E^\circ_{\text{سلول}}$

چنین سلولی، الکترولیتی نیست $\rightarrow ۰/۹ = -۰/۷۶ - (-۱/۶۶) =$

سلول الکترولیتی $\begin{cases}\text{قطب منفی}\rightarrow Zn\\ \text{قطب مثبت}\rightarrow Cu\end{cases} \Rightarrow E^\circ_{\text{سلول}} = -۰/۷۶ - (۰/۳۴) = -۱/۱V$

سلول گالوانی $\begin{cases}\text{آند}\rightarrow Al\\ \text{کاتد}\rightarrow Pt\end{cases} \Rightarrow E^\circ_{\text{سلول}} = ۱/۲۰ - (-۱/۶۶) = ۲/۸۶V$

E° سلول‌های الکترولیتی منفی و E° سلول گالوانی مثبت است.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۴۷ و ۴۸)

۹۸- **گزینهٔ «۲»** *(حامد صابری)*

ابتدا باید حجم مولی گازها را در شرایط سوال محاسبه کنیم:

$$\underbrace{\frac{P_1V_1}{T_1}}_{STP} = \underbrace{\frac{P_2V_2}{T_2}}_{\text{شرایط سوال}} \Rightarrow \frac{۱\times ۲۲/۴}{۲۷۳} = \frac{۲\times V_2}{۲۷۳+۳۹}$$

$$\Rightarrow V_2 = ۱۲/۸\frac{L}{mol}$$

در معادله برقکافت منیزیم کلرید ۲ مول الکترون مبادله می‌شود.

$$MgCl_2(l) \rightarrow Mg(l) + Cl_2(g)$$

$$?\,L\,CO_2 = ۹/۰۳\times ۱۰^{۲۴}e^- \times \frac{۱mol\,e^-}{۶/۰۲\times ۱۰^{۲۳}e^-} \times \frac{۱mol\,Cl_2}{۲mol\,e^-}$$

$$\times \frac{۱۲/۸L\,Cl_2}{۱mol\,Cl_2} = ۹۶L\,Cl_2$$

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۵۵ و ۵۶)

۹۹- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین طیبی)*

می‌دانیم که قدرت کاهندگی آهن از مس بیشتر و از روی کمتر است؛ در نتیجه تنها Zn می‌تواند با $FeSO_4$ واکنش دهد. از اطلاعات سوال در می‌یابیم که پس از پایان واکنش غلظت $Fe^{۲+}$ به نصف رسیده است؛ این مطلب به این معنا است که تمام جرم Zn موجود در آلیاژ وارد واکنش شده است.

مول اولیهٔ $Fe^{۲+}$: $۰/۶L \times \frac{۲mol}{L} = ۱/۲mol$

مول ثانویه $Fe^{۲+}$: $۰/۶L \times \frac{۱}{۲}\frac{۲mol}{L} = ۰/۶mol$

مقدار مول مصرفی $Fe^{۲+} \Rightarrow ۱/۲ - ۰/۶ = ۰/۶mol$

$$Zn(s) + Fe^{۲+}(aq) \rightarrow Zn^{۲+}(aq) + Fe(s)$$

$$?\,g\,Fe : ۰/۶mol\,Fe^{۲+} \times \frac{۱mol\,Fe}{۱mol\,Fe^{۲+}} \times \frac{۵۶g\,Fe}{۱mol\,Fe}$$

$$= ۳۳/۶g\,Fe$$

$$?\,g\,Zn : ۰/۶mol\,Fe^{۲+} \times \frac{۱mol\,Zn}{۱mol\,Fe^{۲+}} \times \frac{۶۵g\,Zn}{۱mol\,Zn}$$

$$= ۳۹g\,Zn$$

در نتیجه در تیغهٔ اولیه $۳۹g$ فلز روی و $۴۱g$ فلز مس وجود داشته است.

جرم نهایی تیغه : جرم اولیهٔ تیغه + جرم Fe رسوب کرده − جرم Zn مصرفی

$$= ۸۰ + ۳۳/۶ - ۳۹ = ۷۴/۶g$$

درصد جرمی Cu در تیغهٔ نهایی $= \frac{۴۱}{۷۴/۶}\times ۱۰۰ \simeq \%۵۵$

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۴۲ تا ۴۴)

۱۰۰- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین طیبی)*

ابتدا واکنش را موازنه کرده و میزان تغییر جرم به ازای ضرایب (Δm) را محاسبه می‌کنیم:

$$۲Al + ۳FeSO_4 \rightarrow Al_2(SO_4)_3 + ۳Fe$$

$\Delta m =$ جرم Al مصرفی - جرم Fe رسوب کرده

$$= (۳\times ۵۶\times \frac{۱}{۲}) - (۲\times ۲۷) = ۸۴ - ۵۴ = ۳۰g$$ افزایش جرم تیغه

در لحظهٔ مشخص شده برروی نمودار، غلظت $[Fe^{۲+}]$ با $[Al^{۳+}]$ برابر شده است.

$$۳Fe^{۲+} \sim ۲Al^{۳+}$$

	$۳Fe^{۲+}$	$۲Al^{۳+}$
مقدار اولیه :	a	۰
تغییرات مول :	$-۳x$	$+۲x$
نهایی :	$a-۳x$	$۲x$

در لحظهٔ t_1 : $a - ۳x = ۲x \Rightarrow a = ۵x$

درصد پیشرفت واکنش $(R) = \frac{\text{تغییرات}}{\text{مقدار اولیه}}\times ۱۰۰$

$$= \frac{۳x}{۵x}\times ۱۰۰ = \%۶۰$$

جرم اولیهٔ تیغه را m در نظر بگیریم:

$$?\,g : mg\,Al \times \frac{۱mol\,Al}{۲۷g\,Al} \times \frac{۶۰}{۱۰۰}$$ افزایش جرم تیغه

$$\times \frac{۳۰g\,\Delta m}{۲mol\,Al} = \frac{m}{۳}g$$ افزایش جرم تیغه

تغییرات جرم تیغه ٪ $= \frac{\text{تغییرات جرم تیغه}}{\text{جرم تیغه اولیه}}\times ۱۰۰$

$$= \frac{\frac{m}{۳}}{m}\times ۱۰۰ \simeq \%۳۳$$ افزایش جرم تیغه

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۴۴ و ۴۵)